



Data Envelopment Analysis:
A evolução do estado da arte
na metodologia e nas aplicações

Ana S. Camanho

Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal

51º SBPO

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) | Campus Limeira

4 Setembro 2019

Conteúdo

1. Introdução
2. Medição de eficiência: a evolução do estado da arte
 - Diferentes perspectivas de avaliação de eficiência
 - A evolução da metodologia de *Data Envelopment Analysis* (DEA)
 - Roteiro das aplicações de DEA
3. Conclusões

Introdução:

Relevância da medição de desempenho

“Productivity isn't everything, but in the long run it is almost everything. A country's ability to improve its standard of living over time depends almost entirely on its ability to raise its output per worker”

Paul Krugman (1997)

Introdução:

Relevância da medição de desempenho

- Admitindo que níveis elevados de eficiência e produtividade, bem como a melhoria de desempenho ao longo do tempo, são objetivos desejáveis, então é crucial definir e medir a eficiência e a produtividade em **contextos multidimensionais** de maneira a **respeitar a teoria económica** e **fornecer informações úteis para os gestores e decisores políticos**.

Introdução:

Conceitos subjacentes à avaliação de desempenho

- Medidas absolutas:
 - Índice de **produtividade**: quociente entre um *output* e um *input*.
- Medidas relativas:
 - Comparação do índice de produtividade (output/input) entre organizações num dado momento. Este é o conceito subjacente à medição da **eficiência** e ao **benchmarking**.
 - **Evolução da produtividade** ao longo do tempo, para uma mesma organização.
 - **Evolução da eficiência** ao longo do tempo, para uma mesma organização.

Introdução:

Conceitos subjacentes à avaliação de desempenho

- Eficiência

(baseado na definição de Pareto-Koopmans):

*“A Decision Making Unit (DMU) is to be rated as fully 100% efficient if and only if **the performances of other DMUs do not show** that some of its inputs or outputs can be improved without worsening some of its other inputs or outputs”*

Cooper, Seiford and Zhu (2011)

Medição de eficiência: Diferentes perspectivas

- Abordagens tradicionais à **medição de desempenho**:

- Rácios:

Medidas de produtividade parciais, mas têm limitações na representação da natureza multidimensional das organizações.

*“The **law of trade-offs** states that no single plant can provide superior performance in all dimensions simultaneously.”*

*“**Aggregation** is needed otherwise we will be lost in detail and we will never see the big picture – the most important requirement for making strategic decisions.”*

Vastag (2000).

- Função Produção:

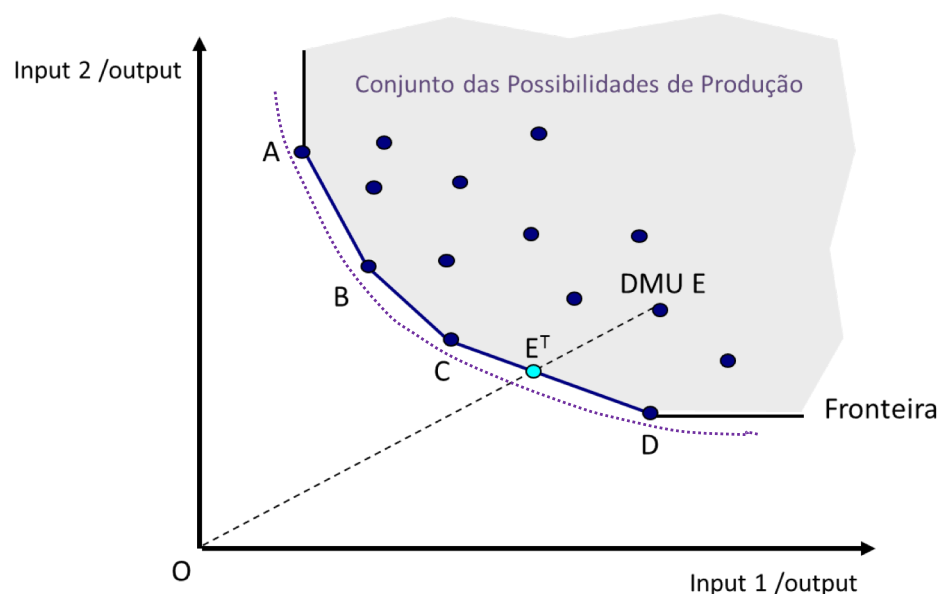
Expressa o nível **máximo de output que é possível obter com determinados recursos**, mas tem limitações na forma de estimação.

*“The theoretical definition of a production function expressing the **maximum amount of output** obtainable from **given input bundles** with fixed technology has been accepted for many decades. And for almost as long, econometricians have been estimating average production functions.”*

Aigner et al (1977)

Medição de eficiência: Diferentes perspectivas

- **Contributos da proposta de Farrell (1957)** para a avaliação de eficiência:
 - Comparação com **observações empíricas**.
 - Quantificação da medida de eficiência como uma **contração radial dos *inputs*** (ou uma **expansão radial dos *outputs***) até atingir a fronteira.



Esta abordagem permite obter uma **medida sumária de eficiência** para cada empresa, com base em comparações com o melhor desempenho observado noutras empresas da amostra.

Medição de eficiência: Diferentes perspetivas

- Como se **operacionalizam** estes conceitos em **situações multidimensionais**?

A resposta surgiu no final da década de 70 do século passado, dando origem aos **métodos de fronteira** para avaliação de desempenho:

Fronteiras Estocásticas

- Aigner, D., Lovell, C., Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of Stochastic Frontier production models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21-37.
- Meeusen, W., van den Broeck, J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review*, 18(2), 435-444.

Data Envelopment Analysis

- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 424-444.

Medição de eficiência: Diferentes perspetivas

- **Fronteiras Estocásticas**

- Obriga à especificação *a priori* de formas funcionais para a fronteira (método paramétrico).
- Obriga à identificação de uma única variável de *output* ou *input*, habitualmente em representação do objetivo económico da organização (maximização de receitas ou minimização de custos).
- Modelação probabilística dos desvios em relação à fronteira (método estocástico).

- ***Data Envelopment Analysis***

- Não é necessário definir explicitamente uma forma matemática para a função de produção que representa a fronteira (método não-paramétrico).
- Permite análises de eficiência com vários *inputs* e *outputs*.
- Os *inputs* e *outputs* podem ser medidos em unidades diferentes (não há necessidade de considerar valores monetários).
- Não tem em conta erros aleatórios associados à medição dos dados ou especificação da fronteira (método determinístico).

***Data Envelopment Analysis (DEA)* é atualmente o método mais utilizado para análises comparativas de eficiência.**

Medição de eficiência: Modelo de DEA

Formulação matemática do modelo de DEA para avaliação de eficiência:

[Charnes et al, 1978]

- Vamos começar por uma medida de produtividade (rácio)

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}}$$

e generalizar o rácio para uma situação multidimensional:

$$\frac{\text{Output}_1 + \text{Output}_2 + \text{Output}_3 + \dots}{\text{Input}_1 + \text{Input}_2 + \text{Input}_3 + \dots}$$

Mas os indicadores podem ter escalas distintas ou a sua importância relativa ser diferente...

A soma dos inputs e dos outputs não é um procedimento adequado!!

- A agregação dos indicadores deverá ser feito através de uma ponderação:

$$\frac{\text{Output}_1 \times \text{peso}_1 + \text{Output}_2 \times \text{peso}_2 + \text{Output}_3 \times \text{peso}_3 \dots}{\text{Input}_1 \times \text{peso}_1 + \text{Input}_2 \times \text{peso}_2 + \text{Input}_3 \times \text{peso}_3 \dots}$$

Se soubéssemos os pesos dos outputs e dos inputs, o problema estaria resolvido...

Seria suficiente comparar este indicador com o melhor valor observado na amostra.

A maior contribuição do modelo DEA é dar-nos informações sobre o valor dos pesos.

Medição de eficiência: Modelo de DEA

Formulação matemática do modelo de DEA:

[Charnes et al, 1978]

- Para cada DMU, temos um modelo que maximiza a medida de eficiência, sujeito a restrições que obrigam todas as DMUs a obterem uma medida de eficiência menor ou igual a um.

$$\text{Max } e_{j_0} = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj_0} \times u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ij_0} \times v_i}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} \times u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ij} \times v_i} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

Conversão para Programação Linear

Modelo de DEA orientado aos inputs

$$\text{Max } e_{j_0} = \sum_{r=1}^s y_{rj_0} \times u_r$$

sujeito a :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij_0} \times v_i = 1$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} \times u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} \times v_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

x_{ij} = quantidade do input i na DMU j

y_{rj} = quantidade do output r na DMU j

j_0 = DMU avaliada

e_{j_0} = medida de eficiência para a DMU avaliada

Variáveis de decisão:

v_i = peso atribuído ao input i ($i = 1, \dots, m$)

u_r = peso atribuído ao output r ($r = 1, \dots, s$)

Medição de eficiência: Modelo de DEA

Formulação matemática do modelo de DEA:

[Charnes et al, 1978]

Dualidade da Programação Linear

Envelopment formulation

$$\text{Min } e_{j_0} = \theta_0$$

sujeito a

$$\theta_0 \times x_{ij_0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \times x_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_{rj_0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \times y_{rj} \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad \forall j$$

Weights formulation

$$\text{Max } e_{j_0} = \sum_{r=1}^s y_{rj_0} \times u_r$$

sujeito a :

$$\sum_{i=1}^m x_{ij_0} \times v_i = 1$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} \times u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} \times v_i \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_r \geq 0$$

x_{ij} = quantidade do input i na DMU j

y_{rj} = quantidade do output r na DMU j

j_0 = DMU avaliada

θ_0 = medida de eficiência para a DMU avaliada

λ_j = coeficientes da combinação linear dos peers j ($j = 1, \dots, n$)

Variáveis de decisão:

Medição de eficiência: Modelo de DEA

Formulação matemática do modelo de DEA:

[Charnes et al, 1978]

Envelopment formulation

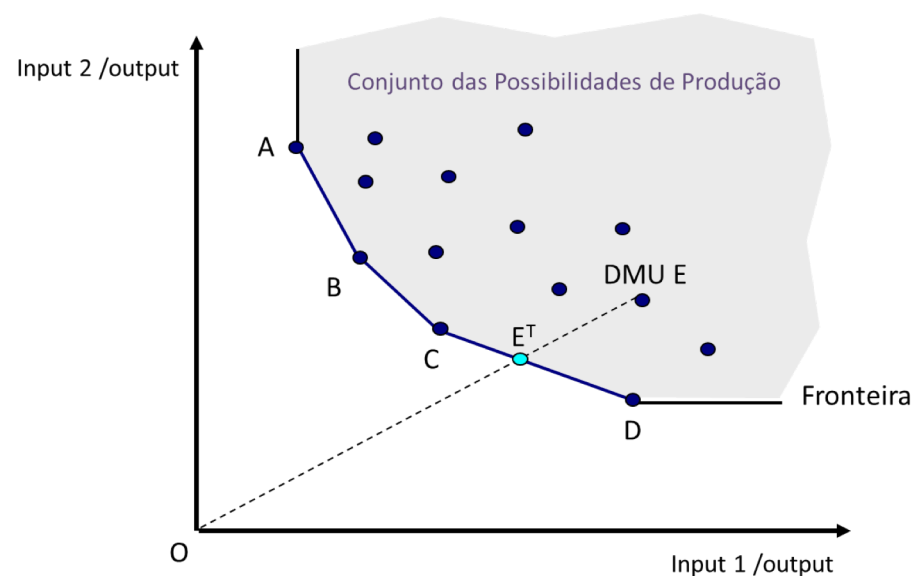
$$\text{Min } e_{j_0} = \theta_0$$

sujeito a

$$\theta_0 \times x_{ij_0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \times x_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_{rj_0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \times y_{rj} \quad , \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad , \quad \forall j$$



Eficiência

$$\theta_E = \frac{\overline{OE^T}}{\overline{OE}}$$

x_{ij} = quantidade do input i na DMU j

y_{rj} = quantidade do output r na DMU j

j_0 = DMU avaliada

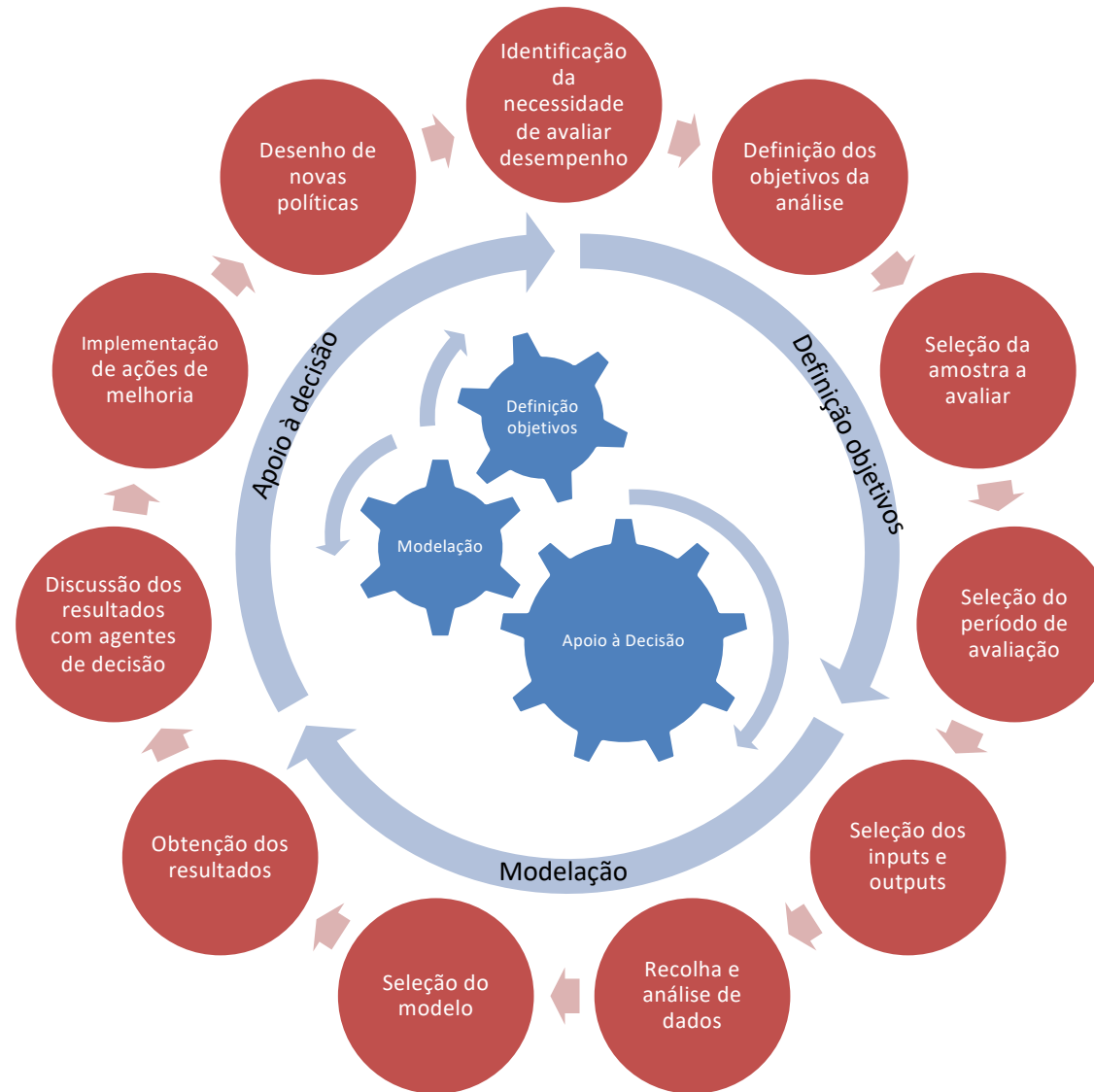
θ_0 = medida de eficiência para a DMU avaliada

λ_j = coeficientes da combinação linear dos peers j ($j = 1, \dots, n$)

Variáveis de decisão:

DEA: Processo de Aplicação

Aplicação Driven Theory (William Cooper)



Introdução

Contexto

Metodologia

Aplicações

Conclusões

DEA: Evolução do estado da arte

1. Construção da fronteira e medição da eficiência

1. Rendimentos à escala
2. Escalas de medição dos dados
3. Modelos de indicadores compósitos
4. Medidas de distância à fronteira
5. Tratamento de outputs indesejáveis
6. Análise estocástica das estimativas de eficiência
7. Tratamento de variáveis externas (não-discricionárias)

2. Incorporação do julgamento do decisor nos modelos

1. Modelos com restrições de pesos
2. Modelos com objetivos económicos

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo

1. Indicadores de evolução de produtividade
2. Avaliação da convergência

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs

1. *Network* DEA
2. Análise de desempenho de grupos de DMUs

Modelo de DEA

[Charnes *et al*, 1978]

Antecedentes:

Pareto (1904)

Koopmans (1951)

Farrell (1957)

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.1 Rendimentos à escala

Marcos da literatura nesta área:

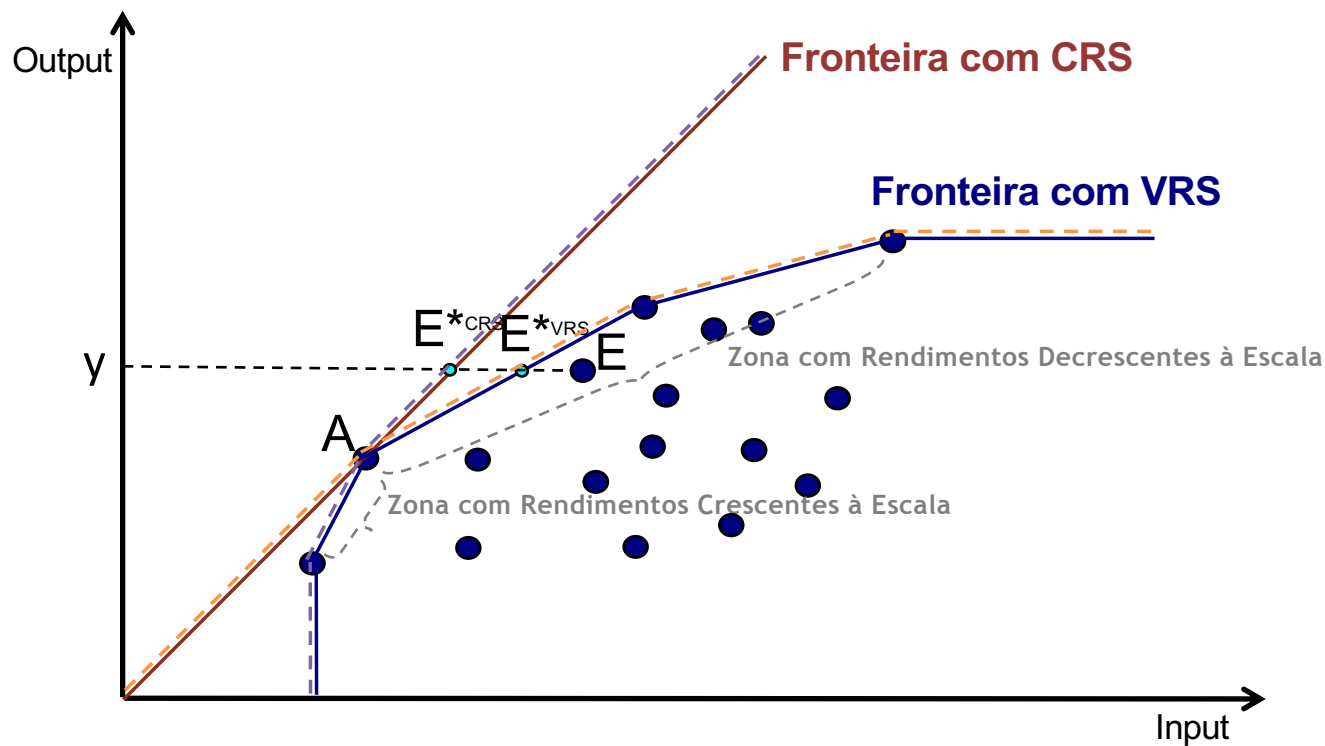
- Modelação dos rendimentos à escala na fronteira das possibilidades de produção.
[Banker, 1984a]
- Identificação da Escala de Máxima Produtividade (MPSS).
[Banker, 1984b]
- Identificação do tipo de rendimentos à escala associado às DMUs eficientes.
[Fare et al, 1985; Banker and Thrall, 1992]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.1 Rendimentos à escala

Ilustração dos conceitos fundamentais de rendimentos à escala

- Rendimentos Constantes à Escala (CRS) [Charnes et al, 1978]
- Rendimentos Variáveis à Escala (VRS) [Banker et al, 1984]
- Rendimentos à Escala Não Decrescentes (NDRS)
- Rendimentos à Escala Não Crescentes (NIRS)



$$\text{Eficiência} = \frac{\overline{yE^{*CRS}}}{\overline{yE}}$$

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.1 Rendimentos à escala

Extensões à literatura nesta área:

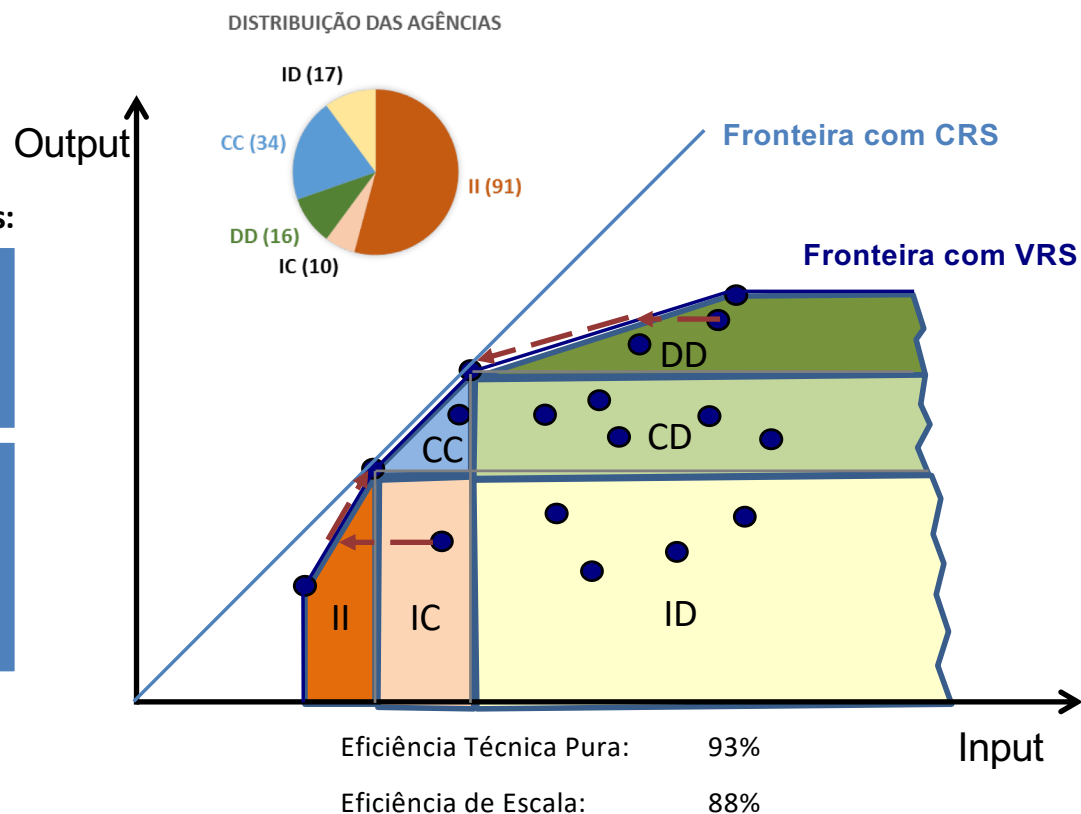
- Classificação dos rendimentos à escala para DMUs ineficientes (no interior das fronteiras das possibilidades de produção) e definição de **objetivos** que permitam atingir locais na fronteira com **MPSS**. Este método foi aplicado à análise de eficiência de **agências bancárias**.

[Camanho and Dyson, 1999]

Modelo da atividade das agências bancárias (abordagem de produção)

	Objetivos:	
Inputs	• Nº colaboradores	• 106%
	• Área	• 86%
	• Custos de funcionamento	• 100%
	• Nº ATMs externas	• 105%
Outputs	• Nº transações na agência	• 138%
	• Nº transações em ATMs	• 164%
	• Nº de contas (depósitos & crédito)	• 133%
	• Valor depósitos	• 139%
	• Valor crédito	• 134%

Amostra de 168 agências bancárias



1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.2 Escalas de medição dos dados

Marcos da literatura nesta área:

- Modelos que permitem a manipulação de dados em escalas de natureza ordinal.
[Banker and Morey, 1986; Cook et al., 1993; Cook et al., 1996]
- Modelos com indicadores especificados como índices (rácios ou percentagens).
[Hollingsworth and Smith, 2003; Emrouznejad and Amin, 2009; Olesen et al, 2015]
- Modelos com indicadores com dados negativos.
[Portela et al, 2004]
- Modelos para indicadores com valores limitados (*Bounded Variable Models*).
[Cooper et al, 2000]

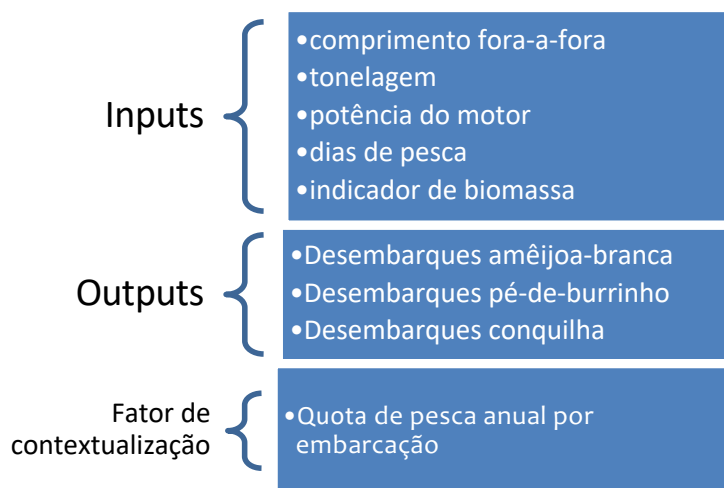
1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.2 Escalas de medição dos dados

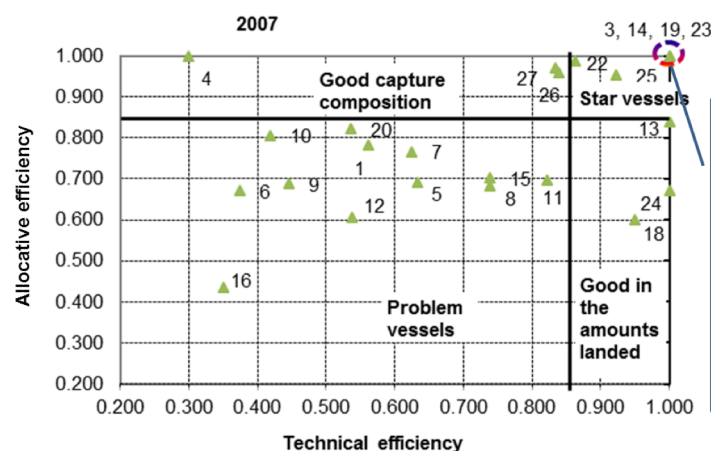
Extensões à literatura nesta área:

- Aplicação de *Bounded Variable Models* na análise de eficiência da **frota da ganchorra (pesca artesanal)** a operar em Portugal, tendo em conta as **quotas** definidas para os limites de captura por embarcação.
[Oliveira et al. 2010]

Modelo da atividade das embarcações



Amostra de 27 embarcações locais e 20 costeiras, em 2005, 2006 e 2007.



Na frota local, as melhores práticas são embarcações acima da média quer em termos de tonelagem, quer em termos de comprimento fora-a-fora

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.3 Modelos de indicadores compostos

Marcos da literatura nesta área

Permitem análises em contextos não produtivos, sem envolver a transformação de inputs em outputs.

Fazem uma agregação de vários indicadores numa medida sumária de desempenho. Os pesos usados na agregação possam variar entre DMUs.

- **Modelos de DEA sem inputs.**

É usado um input unitário para todas as DMUs, que deverá ser visto como um timoneiro, com o responsabilidade de dirigir as DMUs para melhores padrões de desempenho.

[Cook and Kress (1990), Lovell et al. (1995)]

- ***Benefit-of-the-doubt models.***

Corresponde a uma formulação equivalente ao modelo original de DEA (com input unitário, rendimentos constantes à escala e orientação aos inputs), sem considerar explicitamente os inputs.

[Cherchye et al. (2007)]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.3 Modelos de indicadores compósitos

Extensões à literatura nesta área:

- Avaliação do **desempenho ambiental de países** com recurso a um modelo de **indicadores compósitos**. Para além de atribuir uma medida de desempenho a cada país, esta metodologia pode ser usada para fins de benchmarking e definição de objetivos.

[Zanella et al, 2013]

		Indicator weights (w)	
Human Health 50%	Environmental burden of disease 25%	Disability Life Adjusted Years (O1)	25%
	Air pollution 12.5% (effects on humans)	Access to adequate sanitation (O2)	6.3%
		Access to drinking water (O3)	6.3%
	Water 12.5% (effects on humans)	Indoor air pollution (O4)	6.3%
		Outdoor air pollution (Urban Particulates) (O5)	6.3%
	Air Pollution 4.2% (effects on ecosystem)	Ozone Exceedance (O6)	2.1%
		Non-methane volatile organic compound emissions (O7)	0.7%
		Sulfur dioxide emissions (O8)	0.7%
	Water 4.2% (effects on ecosystem)	Nitrogen oxides emissions (O9)	0.7%
		Water quality index (O10)	2.1%
Water stress index (O11)		1.0%	
Biodiversity & Habitat 4.2%	Water scarcity index (O12)	1.0%	
	Biome protection (O13)	2.1%	
	Critical habitat protection (O14)	1.0%	
	Marine protection (O15)	1.0%	
Forestry 4.2%	Growing stock change (O16)	2.1%	
	Forest cover change (O17)	2.1%	
Fisheries 4.2%	Marine trophic index (O18)	2.1%	
	Trawling intensity (O19)	2.1%	
Agriculture 4.2%	Agricultural water intensity (O20)	0.8%	
	Agricultural subsidies (O21)	1.3%	
	Pesticide regulation (O22)	2.1%	
Climate Change 25%	Greenhouse gas emissions per capita (O23)	12.5%	
	Industrial greenhouse gas emissions intensity (O24)	6.3%	
	CO2 emissions per electricity generation (O25)	6.3%	
Ecosystem Health 50%			

Dados usados no cálculo do *Environmental Performance Index 2010* (EPI).

Dados de **163 países**, com 25 indicadores agrupados em 10 categorias.



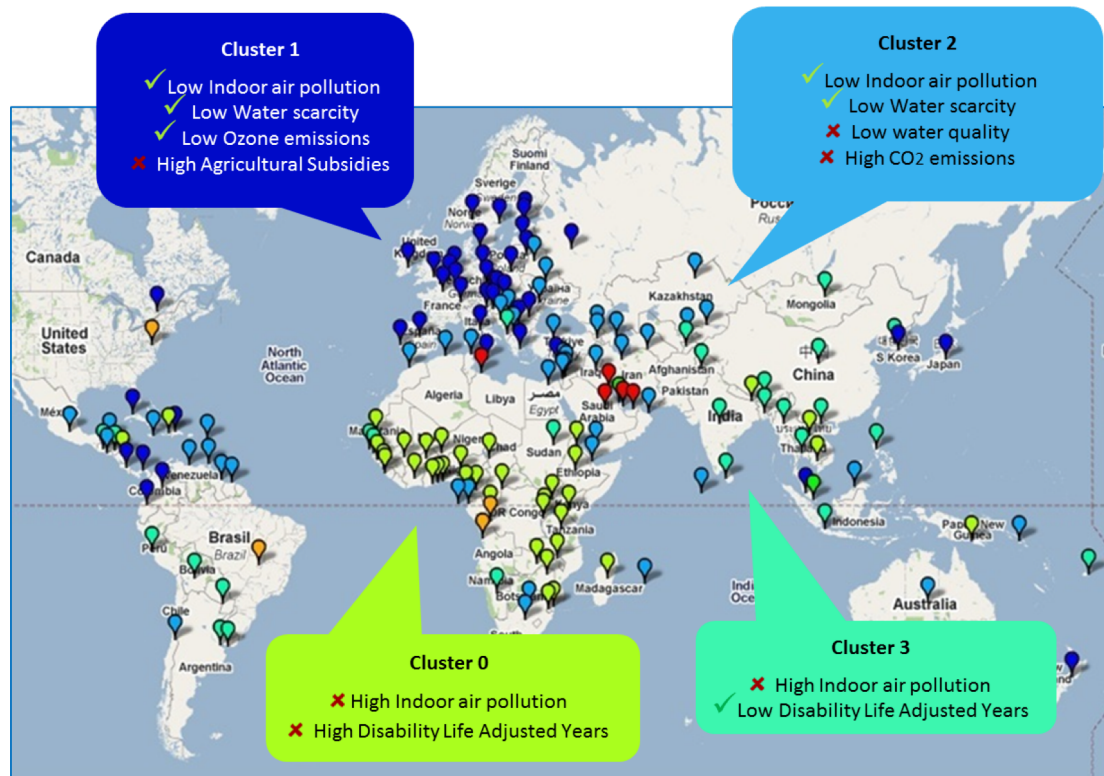
1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.3 Modelos de indicadores compósitos

Extensões à literatura nesta área:

- Avaliação do **desempenho ambiental de países** com recurso a um modelo de **indicadores compósitos**. Para além de atribuir uma medida de desempenho a cada país, esta metodologia pode ser usada para fins de benchmarking e definição de objetivos.

[Zanella et al, 2013]



Identificar as **categorias** e indicadores em que cada país tem **bom desempenho** e onde há **maior potencial de melhoria**.

Exemplo: Irlanda

Biodiversity & Habitat Environmental burden of disease Climate Change	Maior potencial de melhoria
---	------------------------------------

Water (effects on humans) Water (effects on ecosystem) Air Pollution (effects on humans) Air Pollution (effects on ecosystem)	Bom desempenho
--	-----------------------

Identificar os países que são **exemplos de melhores práticas (peers)** em iniciativas de **benchmarking**.

Exemplo: Irlanda

França $\lambda=0.689$	Islândia $\lambda=0.255$	Costa Rica $\lambda=0.056$
---------------------------	-----------------------------	-------------------------------



1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.4 Medidas de distância à fronteira

Marcos da literatura nesta área:

① Modelos não radiais:

- *Additive Model*

Assegura a obtenção de pontos na fronteira de acordo com a definição de Pareto-Koopmans (sem folgas), através da especificação da função objetivo com base nas variáveis de folga das restrições.

[Charnes, Cooper, Golany, Seiford and Stutz, 1985]

- *Slacks-Based Measure (SBM)*

Adapta a especificação da função objetivo (definida com base nas variáveis de folga) para que fique invariante em relação às unidades de medida dos inputs e outputs.

[Tone, 2001]

- *Russell Measure*

Define uma função objetivo invariante em relação às unidades de medida dos inputs e outputs, com recurso a alterações proporcionais específicas para cada input e output.

[Fare and Lovell, 1978; Pastor, Ruiz and Sirvent, 1999]

② Modelos direcionais:

- Modelos de Função Distância Direcional (DDF)

Modelos que permitem definir a direção de projeção das DMUs ineficientes para a fronteira, através da especificação de um vetor direcional.

[Chambers, Chung and Fare, 1996]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.4 Medidas de distância à fronteira

Ilustração dos conceitos fundamentais dos modelos de função distância direcional

[Chambers, Chung and Fare, 1996]

Formulação do modelo de avaliação de desempenho:

$$\max \beta$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rj_0} + \beta g_y \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij_0} - \beta g_x \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

β

Nível de ineficiência da DMU avaliada

Representa o potencial de melhoria dos inputs e outputs

(g_x, g_y)

Vetor direcional cujas componentes indicam a direção de ajustamento dos inputs e outputs

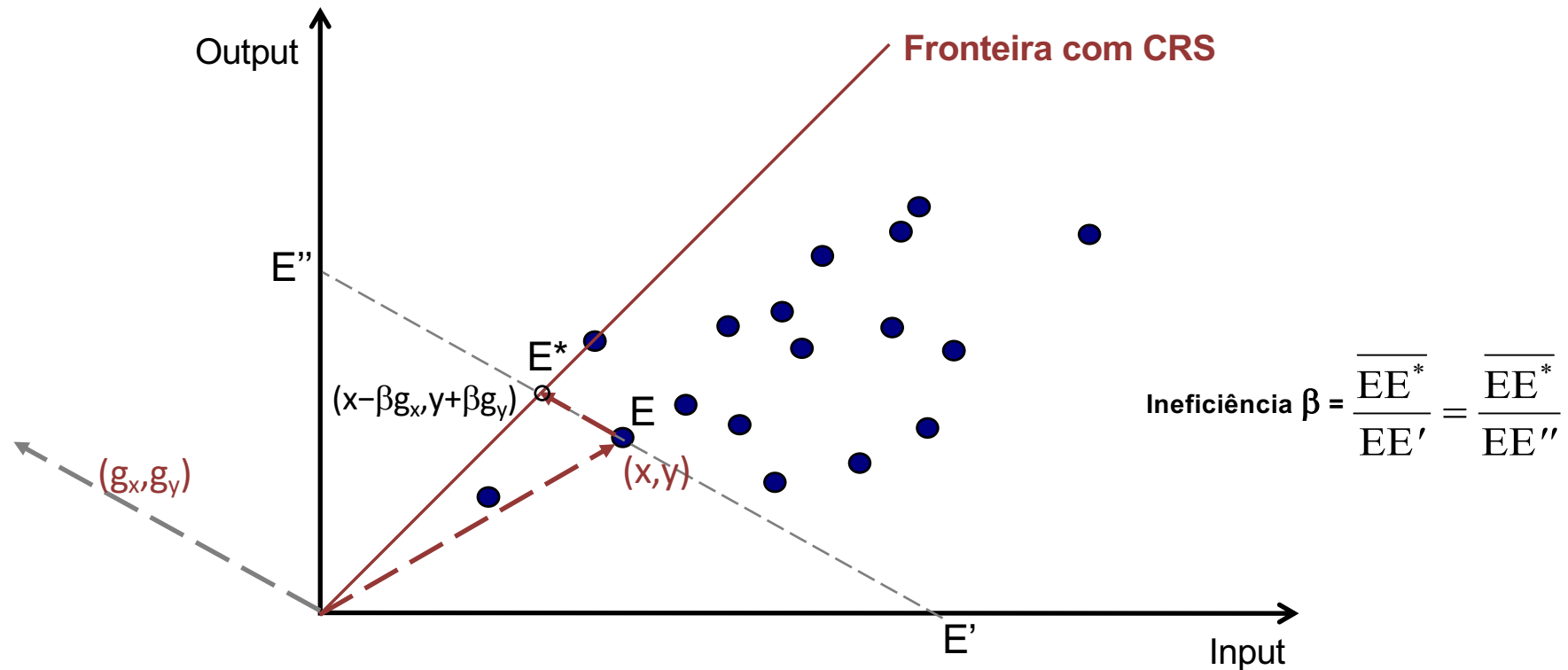
É frequentemente especificado com componentes iguais aos valores observados dos inputs e outputs

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.4 Medidas de distância à fronteira

Ilustração dos conceitos fundamentais dos modelos de função distância direcional

[Chambers, Chung and Fare, 1996]



1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.4 Medidas de distância à fronteira

Extensões à literatura nesta área:

- Análise de desempenho das **idades** tendo em conta os **níveis de qualidade de vida e sustentabilidade ambiental** com recurso a modelos de função distância direcional.

[Zanella et al. 2015]

Modelo conceptual composto por 24 indicadores agrupados em 8 dimensões

Human well-being	Housing quality	Average living area per person m ² Proportion of households living in owned dwellings in cities
	Accessibility and Transportation	Multimodal accessibility (EU27=100) Share of journeys to work not done by car Length of public transport network per inhabitant (km)
	Human health	Life expectance Infant Survival rate (per 1000 live births) Available hospital beds in cities (per 1000 inhabitants)
	Economic and social aspects	Employment per 100 of residents aged 15-64 GDP per head Median disposable annual household income % of the households receiving more than half the national average income Population per recorded crime
	Education	Proportion of students completing their compulsory education Students in upper and further education per 1000 resident pop.
	Culture and Leisure	Annual cinema attendance per resident Annual visitors to museums per resident Number of libraries per 1000 residents Green space to which the public has access, per capita
Environmental Impact	Solid waste	Collected solid waste - tonnes per inhabitant and year (tonnes) Proportion of solid waste processed by landfill
	Air Pollutants	Accumulated ozone concentration in excess 70 microgram/m ³ Annual average concentration of NO ₂ Annual average concentration of PM10

Amostra de 120 cidades europeias, no período 2007-2010 (dados do *Urban Audit*)

34 cidades, pertencentes a 12 países distintos, atingiram o **nível máximo de desempenho**

86 cidades têm **potencial de melhoria**, sendo possível indicar para cada uma *peers e targets*.

Foi ainda identificação do potencial de melhoria de cada cidades considerando **cada componente de “Livability”** individualmente:

Cidade	Livability score	Environmental impact	Human wellbeing
Dortmund	0.140	0.698	0.166

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.5 Tratamento de outputs indesejáveis

Marcos da literatura nesta área

DEA assume que a eficiência diminui com o aumento dos inputs e aumenta com o aumento dos outputs. No entanto, há variáveis que se desviam deste comportamento (ex: poluição é um **output indesejável**).

① Abordagem indireta

Implica a transformação dos valores dos outputs indesejáveis (b) para outra escala de medição.

- Modelação dos outputs indesejáveis com recurso aos inversos multiplicativos ($1/b$).
[Golany and Roll, 1989]
- Modelação dos outputs indesejáveis através da subtração do seu valor a um número grande ($M-b$).
[Ali and Seiford (1990)]

② Abordagem direta

Permite tratar os outputs indesejáveis na escala de medida original.

- Tratamento dos outputs indesejáveis com recurso a modelos de função distância direcional, assumindo *weak disposability of outputs*.
[Chung et al., 1997]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.5 Tratamento de outputs indesejáveis

Extensões à literatura nesta área:

- **Novo modelo** de tratamento de **outputs indesejáveis** com recurso a **funções distância direcionais** e aplicação às **centrais hidroelétricas no Brasil**.

(modelo especificado como um indicador composto do tipo *benefit-of-the-doubt*)

[Zanella et al, 2015; Calabria et al, 2016]

$$\max \beta$$

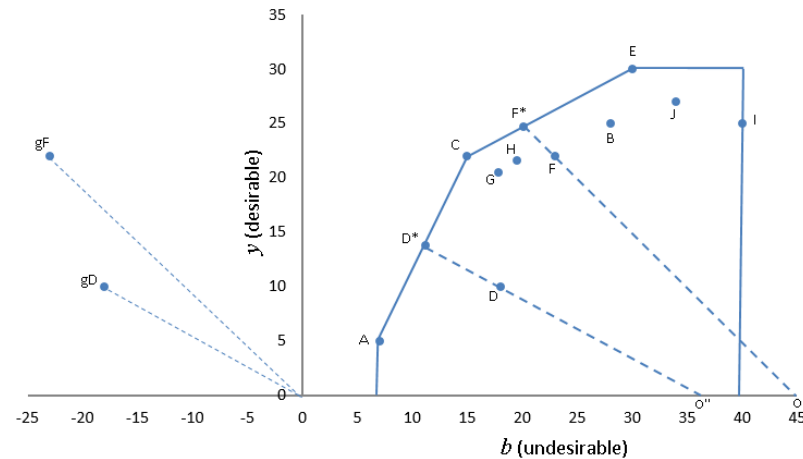
sujeito a :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rj_0} + \beta g_y \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j b_{kj} \leq b_{kj_0} - \beta g_b \quad k = 1, \dots, r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$



$$g = (g_y, -g_b) = (y_{rj_0}, -x_{bj_0})$$

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

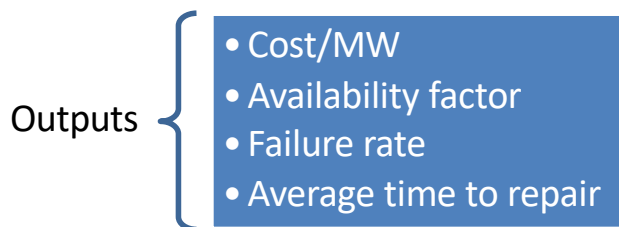
1.5 Tratamento de outputs indesejáveis

Extensões à literatura nesta área:

- **Novo modelo** de tratamento de **outputs indesejáveis** com recurso a **funções distância direcionais** e aplicação às **centrais hidroelétricas no Brasil**.

[Zanella et al, 2015; Calabria et al, 2016]

Modelo do desempenho de centrais hidroelétricas

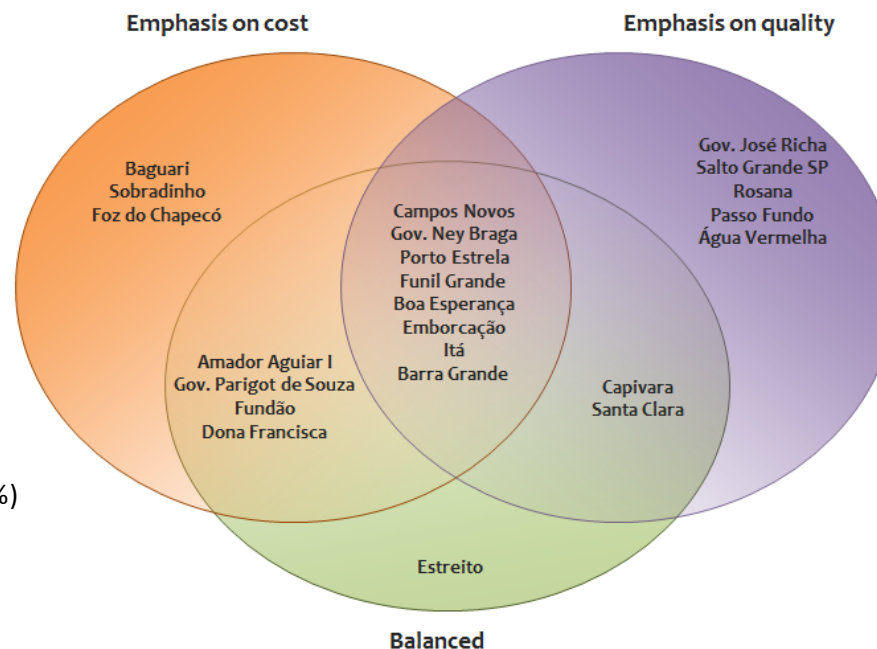


Amostra de 81 centrais hidroelétricas (em 2011), com capacidade instalada superior a 100 MW.

Bounds imposed to the relative importance attributed to the indicators (in %)

Scenarios	Cost/MW	Availability rate	Failure rate	Average time to repair
Emphasis on cost	≥ 65%	≥ 5%	≥ 5%	≥ 5%
Balanced	≥ 35%	≥ 35%	≥ 5%	≥ 5%
Emphasis on quality	≥ 5%	≥ 65%	≥ 5%	≥ 5%

Classification of the TOP15 hydropower plants according to different scenarios



1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.6 Análise estocástica das estimativas de eficiência

Marcos da literatura nesta área:

- Fundamentos estatísticos das medidas de eficiência.

Estabelecimento das condições que permitem realizar testes de hipóteses para comparar os níveis de eficiência entre grupos de DMUs

[Banker, 1993; Banker and Natarajan, (2008, 2011)]

- *Bootstrapping* das medidas de eficiência (*robust efficiency*).

[Simar and Wilson, (1998, 2007)]

- *Partial Frontier methods (order-m and order- α frontiers)*.

Permite obter uma especificação robusta da fronteira na presença de *outliers*

[Cazals et al., 2002; Aragon et al., 2005; Simar, 2003]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.6 Análise estocástica das estimativas de eficiência

Extensões à literatura nesta área:

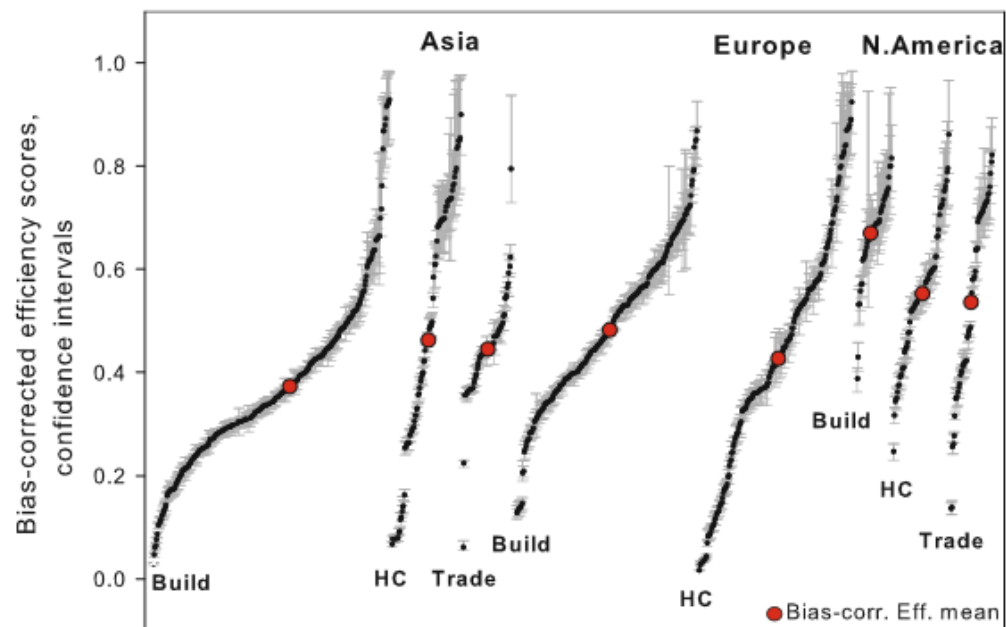
- Aplicação de **Boostrapping** à análise de desempenho de empresas do **setor da construção**.

[Horta et al., 2013]

Modelo do desempenho financeiro das empresas da construção



Amostra de 118 empresas (cotadas em bolsa) de 18 países, entre 1995-2003.



Build - Buildings | HC - Heavy&Civil | Trade - Specialty Trade

Year	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	All years
Bias-corrected efficiency	0.46	0.46	0.47	0.45	0.45	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45
Lower bound	0.44	0.44	0.45	0.43	0.42	0.41	0.42	0.43	0.43	0.43
Upper bound	0.49	0.48	0.50	0.47	0.47	0.46	0.46	0.47	0.47	0.47

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

1.7 Tratamento de variáveis externas não-discricionárias (ND)

Marcos da literatura nesta área:

- Modelos que incluem as variáveis ND como *inputs* ou *outputs*, mas não procuram ajustes proporcionais nessas variáveis.

[Banker and Morey, 1986]

- Modelos com restrições aos *peers*

Visam permitir uma seleção adequada de *peers* com valores das variáveis ND idênticos ou piores do que os da DMU avaliada. Visam permitir comparações mais justas, para que as DMUs que enfrentam condições desfavoráveis fora do seu controle não sejam penalizados por produzir menos *outputs* ou consumir mais *inputs* do que as outras.

[Ruggiero, 1996; Ruggiero, 1998; Ruggiero 2004]

- Modelos de duas fases (*second-stage analysis*)

Visam explicar em que medida as diferenças de eficiência entre DMUs são devidas ao efeito de variáveis não discricionárias. Na 1ª fase utiliza-se um modelo de DEA sem variáveis ND e na 2ª fase recorre-se a uma regressão (Tobit regression; truncated regression with bootstrapping; OLS).

[Ray, 1988; Ray, 1991; Simar and Wilson, 2007; Banker and Natarajan, 2008; McDonald (2009)]

- *Conditional efficiency*

Permite restringir os *peers* através da especificação de uma margem de tolerância (h : *bandwidth*) em relação ao valor observado da variável ND na DMU em avaliação. Recorre a métodos estocásticos para a definir os *peers* aceitáveis para cada DMU.

[Cazals et al, 2002; Daraio and Simar, 2007]

1. Construção da fronteira e medição da eficiência:

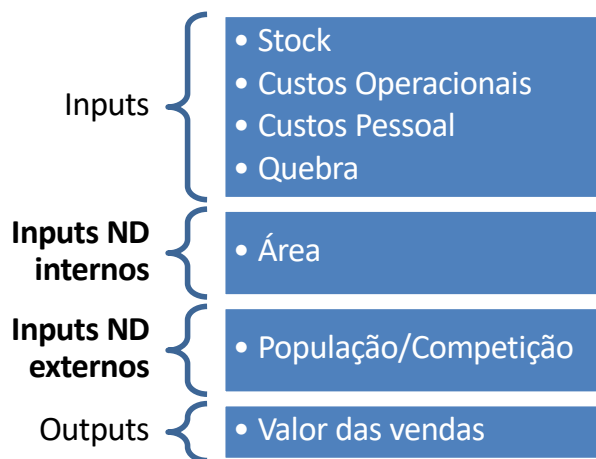
1.7 Tratamento de variáveis não-discrecionárias

Extensões à literatura nesta área:

- **Novo modelo de DDF** para o tratamento de **variáveis não-discrecionárias**, e aplicação à gestão de lojas de retalho.

[Camanho et al., 2009]

Modelo da atividade de lojas de retalho de base alimentar



Amostra de 70 lojas
(supermercados e hipermercados)

max δ_0

$$x_{ij0} - \delta_0 g_{xi} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i \in DI$$

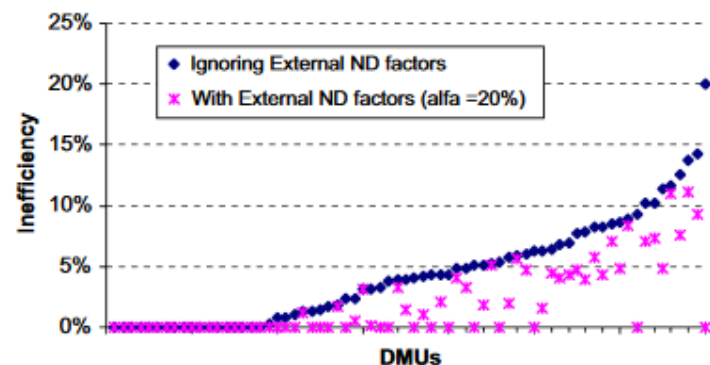
$$y_{rj0} + \delta_0 g_{yr} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r \in DO$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i \in IntNDI$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r \in IntNDO$$

$$\text{if } \lambda_j > 0 \text{ then } \left[\begin{aligned} x_{ij} &\leq x_{ij0} (1 + \alpha_i), \quad \forall i \in ExtNDI \\ \wedge y_{rj} &\geq y_{rj0} (1 - \beta_r), \quad \forall r \in ExtNDO \end{aligned} \right]$$

$$0 \leq \alpha_i < 1, \quad \forall i, \quad 0 \leq \beta_r < 1, \quad \forall r, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \forall j$$



DEA: Evolução do estado da arte

1. Construção da fronteira e medição da eficiência

1. Rendimentos à escala
2. Escalas de medição dos dados
3. Modelos de indicadores compósitos
4. Medidas de distância à fronteira
5. Tratamento de outputs indesejáveis
6. Análise estocástica das estimativas de eficiência
7. Tratamento de variáveis externas (não-discricionárias)

Modelo de DEA

[Charnes *et al*, 1978]

2. Incorporação do julgamento do decisor nos modelos

1. Modelos com restrições de pesos
2. Modelos com objetivos económicos

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo

1. Indicadores de evolução de produtividade
2. Avaliação da convergência

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs

1. *Network* DEA
2. Análise de desempenho de grupos de DMUs

2. Incorporação de julgamentos do decisor:

2.1 Modelos com restrições de pesos

Marcos da literatura nesta área

A principal característica de DEA é a flexibilidade na escolha dos pesos a utilizar na avaliação de cada DMU, que evidenciam os pontos fortes de cada DMU.

No entanto, uma escolha judiciosa dos pesos pode fazer uma DMU parecer mais eficiente do que seria justificável.

① Restrições diretas aos pesos

- Restrições aos pesos absolutos.

[Dyson and Thanassoulis, 1988]

- Restrições às relações entre os pesos (***Assurance Regions Type I*** e ***Type II***).

[Thompson et al., 1990; Khalili et al., 2010]

② Restrições aos pesos virtuais

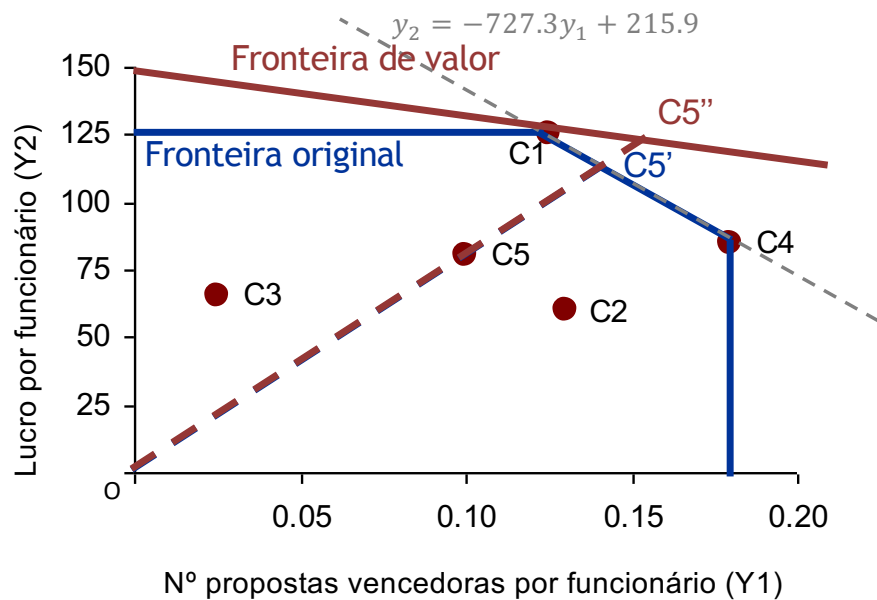
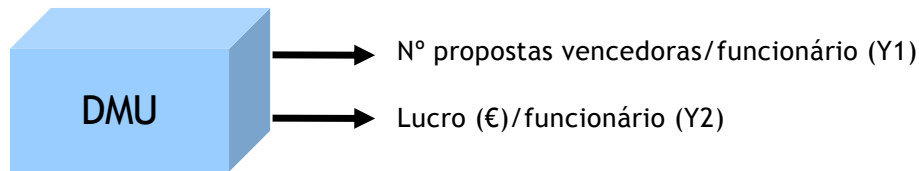
Permite exprimir, em termos percentuais, a importância atribuída a cada input e output.

[Wong and Beasley, 1990]

2. Incorporação de julgamentos do decisor: 2.1 Modelos com restrições de pesos

Ilustração do funcionamento das *Assurance Regions Type I*:

Modelo de DEA orientados aos outputs com CRS



Interpretação dos pesos em modelos de DEA

Relação entre os pesos na solução ótima do modelo de DEA para as DMUs C1 e C4: $\frac{u_{Y1}}{u_{Y2}} = \frac{3.36842105}{0.00463158} = 727.3$, bem como para a DMU C5: $\frac{u_{Y1}}{u_{Y2}} = \frac{4.76190476}{0.00654762} = 727.3$

Os valores relativos dos pesos correspondem aos *trade-offs* entre os indicadores, avaliados na fronteira da tecnologia.

Incorporação da opinião dos agentes de decisão

“Uma proposta vencedora/colaborador é equivalente a gerar um lucro de 200€/colaborador”

Isto poderá ser representado no modelo de DEA por uma restrição do tipo ARI: $\frac{u_{Y1}}{u_{Y2}} = 200$

2. Incorporação de julgamentos do decisor: 2.1 Modelos com restrições de pesos

Ilustração do funcionamento de Restrições Virtuais:

Modelo de DDF com um output desejável e um output indesejável

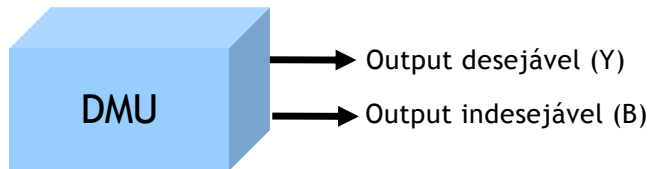
Pesos virtuais

São restrições impostas sobre a DMU j_0 em avaliação, logo são restrições específicas para cada DMU.

Refletem a importância atribuída a cada indicador (em %)

Correspondem ao produto do valor do peso com o valor observado da variável correspondente:

$$\phi_r \leq y_{rj_0} u_r \leq \psi_r \quad \text{ou} \quad \phi_i \leq x_{ij_0} v_i \leq \psi_i$$



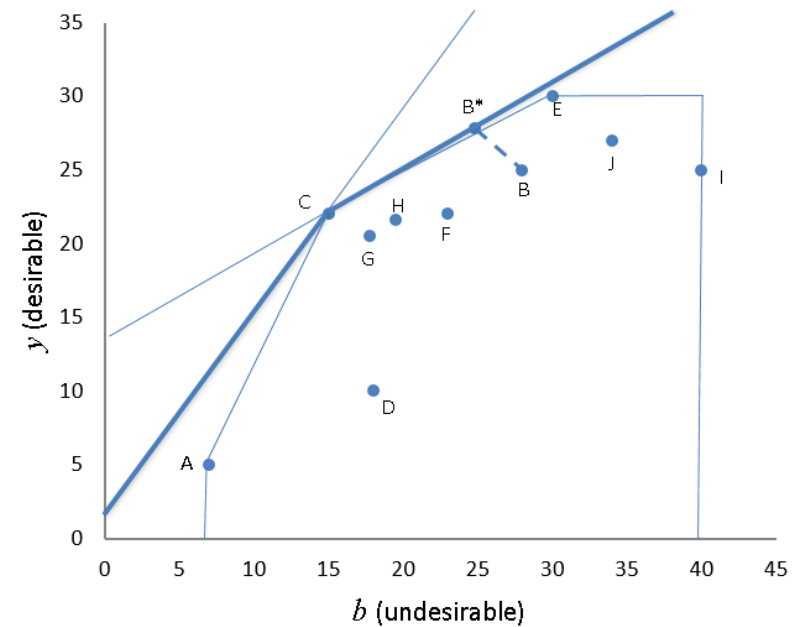
$$\text{Min } e_{j_0} = -y_{j_0} u + b_{j_0} p + v$$

$$\text{s.a: } y_{j_0} u + b_{j_0} p = 1$$

$$-y_j u + b_j p + v \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v \in \mathfrak{R}, u, p \geq 0$$

$$\begin{cases} y_{j_0} u \geq 0.40 \\ b_{j_0} p \geq 0.40 \end{cases}$$



2. Incorporação de julgamentos do decisor:

2.1 Modelos com restrições de pesos

Extensões à literatura nesta área:

Restrições de pesos para refletir a importância dos indicadores, em termos percentuais, formuladas como restrições do tipo ARI.

[Zanella et al, 2015]

Nova especificação Assurance region type I

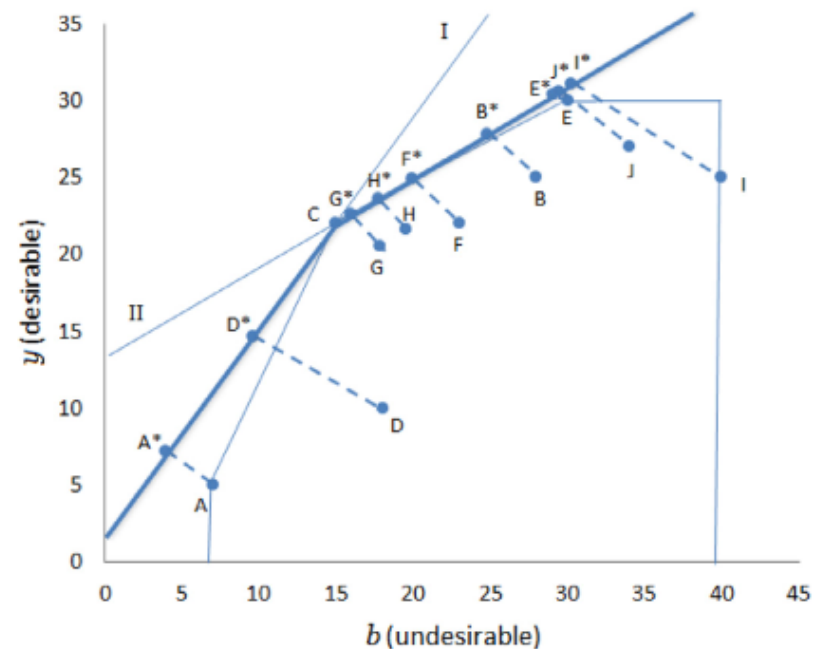
- Impostas sobre uma DMU artificial, correspondente à media da amostra para cada indicador.
- Todas as DMUS são avaliadas contra a mesma fronteira.

$$\phi_r \leq \frac{u_r \bar{y}_r}{\sum_{r=1}^s u_r \bar{y}_r + \sum_{k=1}^l p_k \bar{b}_k} \leq \psi_r$$

$$\phi_k \leq \frac{p_k \bar{b}_k}{\sum_{r=1}^s u_r \bar{y}_r + \sum_{k=1}^l p_k \bar{b}_k} \leq \psi_k$$

Ilustração com:

$$\begin{cases} \frac{u\bar{y}}{u\bar{y} + p\bar{b}} \geq 0.40 \\ \frac{p\bar{b}}{u\bar{y} + p\bar{b}} \geq 0.40 \end{cases}$$



2. Incorporação de julgamentos do decisor:

2.2 Modelos com objetivos económicos

Marcos da literatura nesta área

- Modelos de eficiência económica.

Modelos que permitem determinar o custo mínimo que permitiria obter os outputs atuais, dados os preços dos inputs observados em cada DMU (*cost efficiency*).

Modelos que permitem determinar a receita máxima que poderia ser obtida com os inputs atuais, dados os preços dos outputs observados em cada DMU (*revenue efficiency*).

[Fare et al, 1985]

- Modelos de *profit efficiency*.

Modelos que permitem determinar o lucro máximo, dados os preços dos inputs e dos outputs observados em cada DMU, e assumindo rendimentos variáveis à escala.

[Fare et al, 1994, p.213]

- Estimação de *price efficiency*.

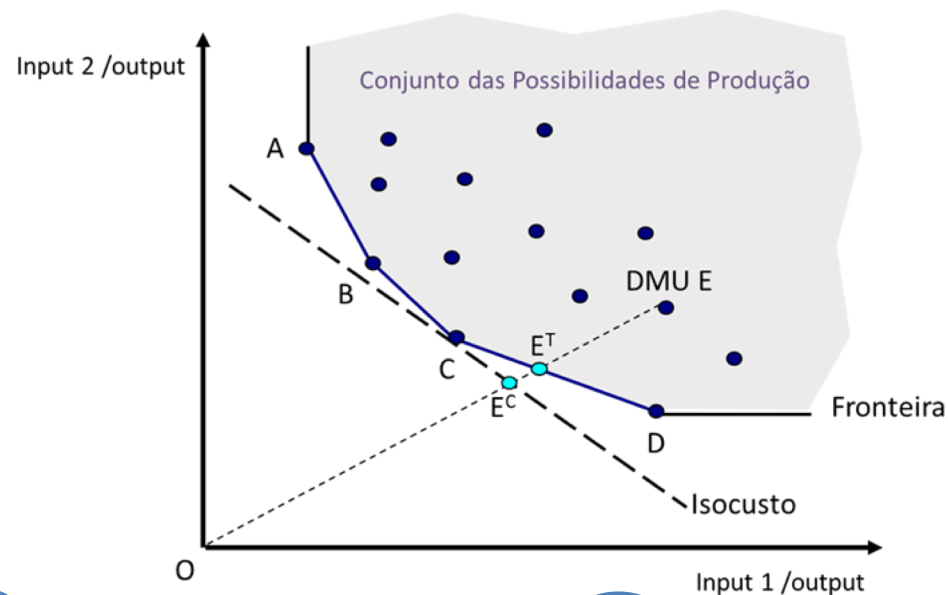
Indica em que medida as DMUs têm preços dos recursos adequados às condições do mercado. Reflete as ineficiências associadas ao pagamento indevido de recursos.

[Camanho and Dyson, 2008]

2. Incorporação de julgamentos do decisor: 2.2 Modelos com objetivos económicos

Ilustração dos conceitos fundamentais dos modelos de desempenho económico

Para além da avaliação de **eficiência técnica**, em muitos contextos o objetivo principal da análise de desempenho é otimizar o desempenho das DMUs tendo em conta **objetivos económicos** (e.g., minimizar custos no caso de uma análise com ênfase nos inputs).



Eficiência Técnica

Uma DMU atinge **eficiência técnica** se assegura a produção dos outputs minimizando o nível de recursos utilizados, tendo em conta o balanço de inputs com que opera.

[Charnes et al, 1978]

Eficiência Económica

Uma DMU atinge **eficiência de custos** se para além de operar com eficiência técnica, escolheu operar com um balanço de inputs que minimiza os custos de operação, tendo em conta os preços relativos dos inputs.

[Farrell, 1957]

DEA: Evolução do estado da arte

1. Construção da fronteira e medição da eficiência

1. Rendimentos à escala
2. Escalas de medição dos dados
3. Modelos de indicadores compósitos
4. Medidas de distância à fronteira
5. Tratamento de outputs indesejáveis
6. Análise estocástica das estimativas de eficiência
7. Tratamento de variáveis externas (não-discricionárias)

Modelo de DEA

[Charnes *et al*, 1978]

2. Incorporação do julgamento do decisor nos modelos

1. Modelos com restrições de pesos
2. Modelos com objetivos económicos

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo

1. Indicadores de evolução de produtividade
2. Avaliação da convergência

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs

1. *Network* DEA
2. Análise de desempenho de grupos de DMUs

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo:

3.1 Indicadores de evolução de produtividade

Marcos da literatura nesta área

- Fundamentos teóricos do Malmquist index

A evolução de produtividade entre dois pontos correspondentes a períodos de tempo distintos pode ser calculada com base em **rácios de funções distância** de cada ponto em relação a uma fronteira de referência.

[Caves et al, 1982]

- **Malmquist index**

O índice de Malmquist, calculado como a média geométrica de dois índices, cada um deles usando como referência a fronteira em t e em $t+1$, permite decompor a evolução da produtividade nas componentes de “Evolução da Eficiência” e “Evolução da Tecnologia” recorrendo a **modelos de DEA**.

[Fare et al, 1994]

- Indicador de Luenberger

Calcula a evolução da produtividade com base em **diferenças** entre **funções de distância direcionais**.

[Chambers et al, 1996]

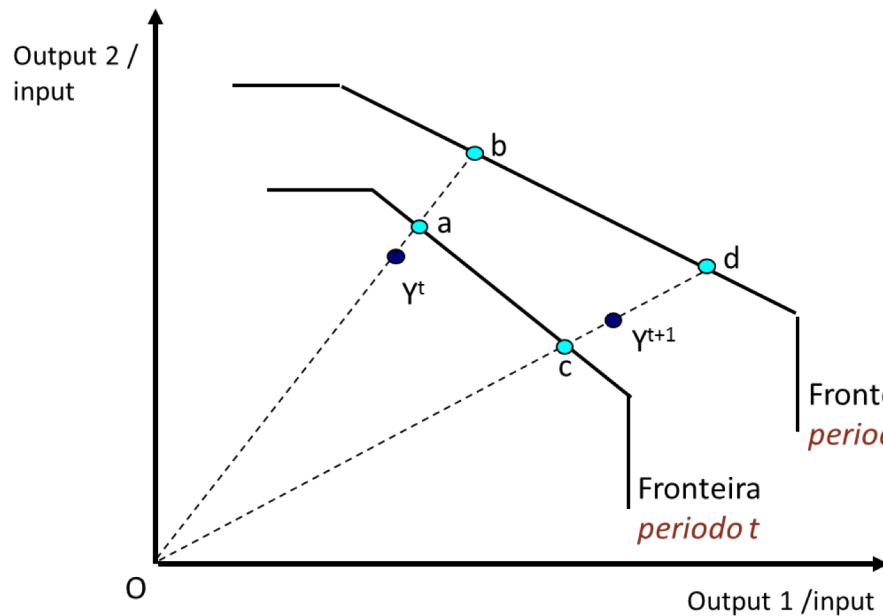
3. Evolução da produtividade ao longo do tempo:

3.1 Indicadores de evolução de produtividade

Ilustração do conceito do Índice de Malmquist

O índice de Malmquist é uma média geométrica de dois índices, avaliados em relação às tecnologias do período t e do período t+1. Deve ser calculado com Rendimentos Constantes à Escala.

Pode ser decomposto nos sub-índices “Efficiency Change” e “Frontier Shift” (ou “Technological Change”)



$$MI^{t,t+1} = \left[\frac{E^t(X_{t+1}, Y_{t+1})}{E^t(X_t, Y_t)} \times \frac{E^{t+1}(X_{t+1}, Y_{t+1})}{E^{t+1}(X_t, Y_t)} \right]^{1/2}$$

$$MI^{t,t+1} = \underbrace{\frac{E^{t+1}(X_{t+1}, Y_{t+1})}{E^t(X_t, Y_t)}}_{\text{Efficiency change}} \times \underbrace{\left[\frac{E^t(X_{t+1}, Y_{t+1})}{E^{t+1}(X_{t+1}, Y_{t+1})} \times \frac{E^t(X_t, Y_t)}{E^{t+1}(X_t, Y_t)} \right]^{1/2}}_{\text{Technological change}}$$

$$M_O = \frac{Oy_{t+1}}{Oa} \times \left[\frac{Oy_{t+1}}{Od} \times \frac{Oy_t}{Ob} \right]^{1/2} = \frac{Oy_{t+1}}{Oy_t} \times \underbrace{\left[\frac{Od}{Oc} \times \frac{Ob}{Oa} \right]^{1/2}}_{>1: \text{technological improvement}} <1: \text{efficiency decline}$$

MI > 1 signals **Productivity growth**
 MI < 1 signals **Productivity decline**

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo:

3.2 Avaliação de convergência

Marcos da literatura nesta área

- Indicadores de convergência

Analisa a evolução do desempenho com ênfase em medidas de σ -convergence (evolução da dispersão dos níveis de eficiência numa indústria ao longo do tempo) e β -convergence (evolução da distância entre as melhores e as piores empresas da indústria, com base na “fronteira das possibilidade de produção” e na “fronteira invertida”).

[Horta and Camanho, 2015; Entani, Maeda, & Tanaka, 2002]

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo:

3.2 Avaliação de convergência

Extensões à literatura nesta área:

- Análise de **convergência** nos níveis produtividade das empresas ao longo do tempo.
[Horta and Camanho, 2015]

σ -
convergência

Há **convergência** no sentido σ se a dispersão dos níveis de eficiência das empresas tende a diminuir ao longo do tempo.

Envolve a análise do **nível de eficiência médio** das empresas.

$$\hat{\sigma}\text{-convergence} = \left(\prod_{j=1}^n EC_j^{t,t+1} \right)^{1/n}$$

Um valor de σ -convergência > 1 significa que as **empresas se aproximaram da fronteira** entre o período t e $t+1$.

β -
convergência

Há **convergência** no sentido β se a produtividade das piores empresas tende a crescer mais rapidamente do que a produtividade das melhores, ou a decrescer mais lentamente do que a produtividade das melhores.

Envolve uma comparação entre o **posicionamento relativo das fronteiras**.

$$\hat{\beta}\text{-convergence} = \frac{\left(\prod_{j=1}^n TC_j^{t,t+1} \right)^{1/n}}{\left(\prod_{j=1}^n WPC_j^{t,t+1} \right)^{1/n}}$$

Um valor de β -convergência < 1 significa que as **fronteiras das melhores e piores práticas se aproximaram** entre o período t e $t+1$.

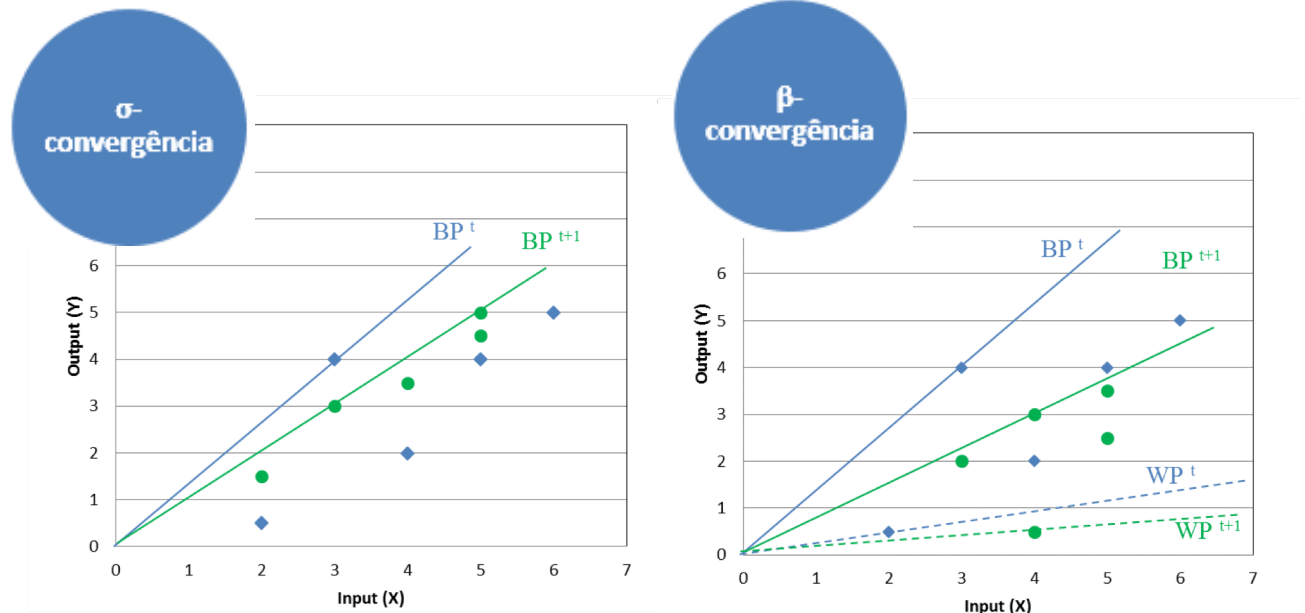
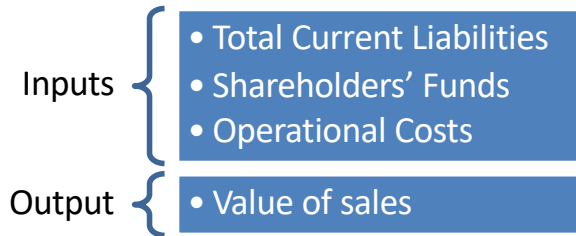
3. Evolução da produtividade ao longo do tempo:

3.2 Avaliação de convergência

Extensões à literatura nesta área:

- Análise de **convergência** nos níveis produtividade das empresas ao longo do tempo. [Horta and Camanho, 2015]

Modelo do desempenho financeiro das empresas da construção



Amostra de 8308 empresas Portuguesas, entre os anos 2008 e 2010.

Tipo de atividade	σ -convergência	β -convergência	Componentes de β -convergência	
			TC	WPC
Buildings	1.36	0.61	0.76	1.25
Road networks	1.06	0.60	0.90	1.51
Hydraulic works	3.05	0.29	0.32	1.11
Mechanical & Electrical	3.30	0.34	0.30	0.88

[I.M. Horta, A.S. Camanho, A nonparametric methodology for evaluating convergence in a multi-input multi-output setting, European Journal of Operational Research, Volume 246, 554-561, 2015.]

DEA: Evolução do estado da arte

1. Construção da fronteira e medição da eficiência

1. Rendimentos à escala
2. Escalas de medição dos dados
3. Modelos de indicadores compósitos
4. Medidas de distância à fronteira
5. Tratamento de outputs indesejáveis
6. Análise estocástica das estimativas de eficiência
7. Tratamento de variáveis externas (não-discricionárias)

Modelo de DEA

[Charnes *et al*, 1978]

2. Incorporação do julgamento do decisor nos modelos

1. Modelos com restrições de pesos
2. Modelos com objetivos económicos

Antecedentes:

Pareto (1904)

Koopmans (1951)

Farrell (1957)

3. Evolução da produtividade ao longo do tempo

1. Indicadores de evolução de produtividade
2. Avaliação da convergência

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs

1. *Network* DEA
2. Análise de desempenho de grupos de DMUs

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs:

4.1 *Network* DEA

Marcos da literatura nesta área

Designa-se por Network DEA a avaliação de desempenho de sistemas, tendo em conta a sua estrutura interna. Corresponde a uma abordagem alternativa à visão convencional em que as operações que compõem a transformação dos inputs em outputs nas DMU são vistas como uma “caixa preta”.

- Separação de operações complexas nos subprocessos que as compõem, para permitir uma melhor compreensão do desempenho do sistema.

[Charnes et al, 1986]

- Desagregação dos processos nas suas componentes, representando os subprocessos em série ou em paralelo, em análises estáticas ou dinâmicas (*Dynamic efficiency*).

[Fare and Grosskopf, 2000]

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs:

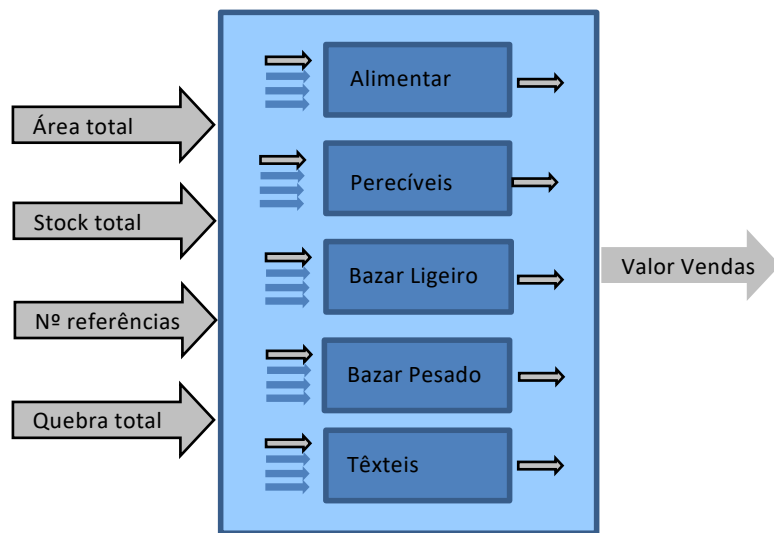
4.1 Network DEA

Extensões à literatura nesta área:

Extensão do modelo de **alocação de um recurso fixo (input) a usos alternativos** (Fare et al., 1997) para alocação de área de exposição em loja aos produtos de diferentes departamentos de um supermercado com vista à maximização do valor total das vendas.

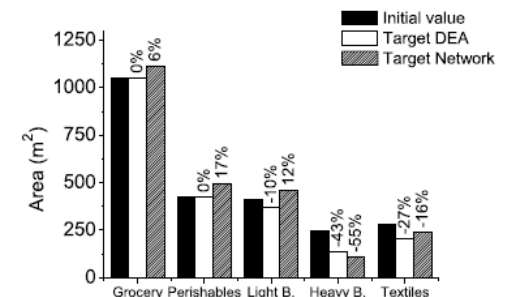
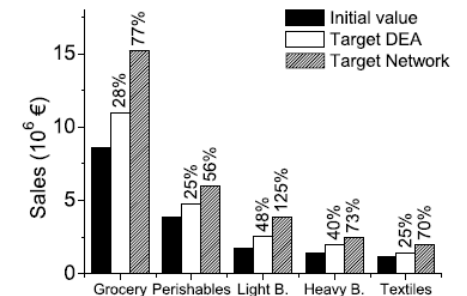
[Vaz et al, 2010]

Modelo da atividade de lojas de retalho de base alimentar



Amostra de 70 lojas

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{r=1}^s \theta_r y_{rj_0} \\
 & \text{s.a. } \theta_r y_{rj_0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s \\
 & x_{1rj_0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{1rj}, \quad r = 1, \dots, s \\
 & x_{ij_0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, \quad i = 2, \dots, m \\
 & x_{1j_0} \geq \sum_{i=1}^5 x_{1rj_0} \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$



4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs:

4.2 Análise de desempenho de grupos de DMUs

Marcos da literatura nesta área

A análise de desempenho de grupos envolve uma comparação das fronteiras de eficiência associadas a determinados conjuntos de DMUs.

- Program efficiency.

Permite comparações entre grupos distintos, quantificando diferenças entre o **nível de eficiência de cada grupo medido em relação à sua própria fronteira**, e as **distâncias entre as fronteiras medidas em relação a uma fronteira única comum** (*pooled frontier* ou *metafrontier*).

[Charnes et al, 1981]

- Pseudo-Malmquist indices para comparações de grupos.

Permite comparações entre grupos distintos, quantificando diferenças de produtividade entre os grupos. Essas diferenças são decompostas entre a comparação da distancia média entre as fronteiras de cada grupo, e a dispersão média dos níveis de eficiência de cada grupo em relação à fronteira do próprio grupo.

[Camanho and Dyson, 2006; Aparicio et al, 2017]

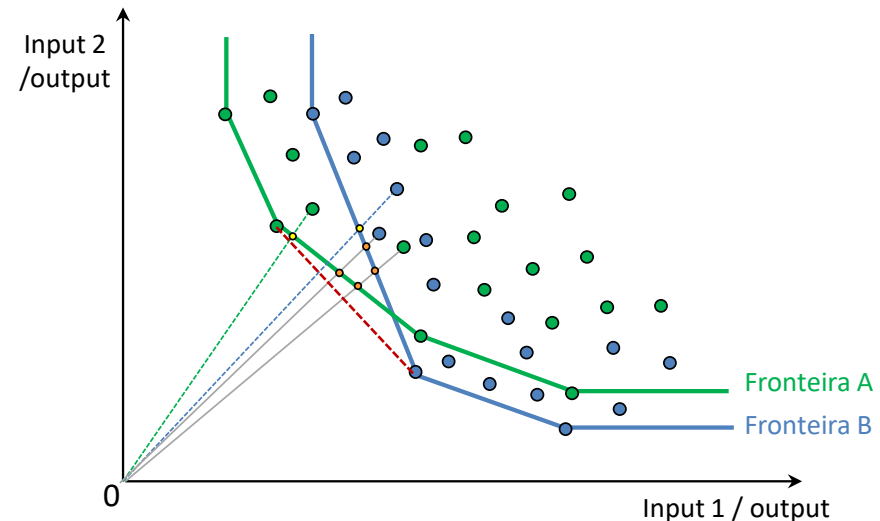
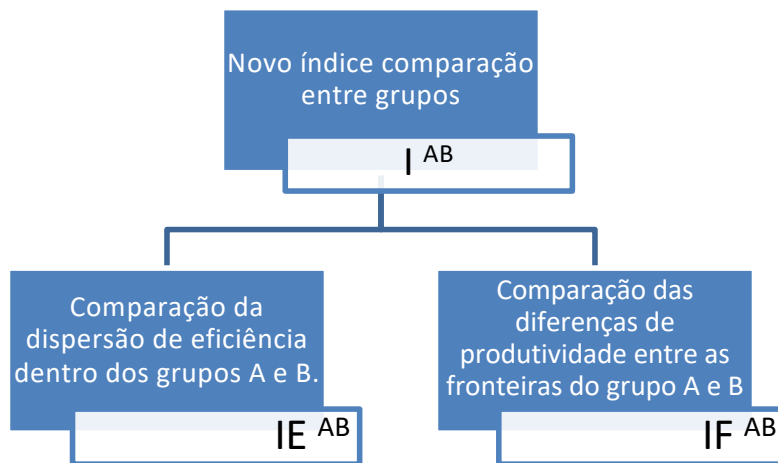
4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs:

4.2 Análise de desempenho de grupos de DMUs

Extensões à literatura nesta área:

Novo método de comparação entre grupos de DMUs baseado no índice de Malmquist. Aplicação do novo método de comparação entre grupos a **balcões bancários em regiões distintas em Portugal**. O novo índice (I^{AB}) foi estendido a comparações envolvendo mais do que dois grupos, garantindo a **circularidade** do índice.

[Camanho and Dyson, 2006]



$$I^{AB} = \left[\frac{\left(\prod_{j=1}^{\delta_A} D^A(X_j^A, Y_j^A) \right)^{1/\delta_A} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\delta_B} D^B(X_j^A, Y_j^A) \right)^{1/\delta_B}}{\left(\prod_{j=1}^{\delta_B} D^A(X_j^B, Y_j^B) \right)^{1/\delta_B} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\delta_A} D^B(X_j^B, Y_j^B) \right)^{1/\delta_A}} \right]^{1/2}$$

$$IE^{AB} = \frac{\left[\prod_{j=1}^{\delta_A} D^A(X_j^A, Y_j^A) \right]^{1/\delta_A}}{\left[\prod_{j=1}^{\delta_B} D^B(X_j^B, Y_j^B) \right]^{1/\delta_B}}$$

$$IF^{AB} = \left[\frac{\left(\prod_{j=1}^{\delta_A} D^B(X_j^A, Y_j^A) \right)^{1/\delta_A} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\delta_B} D^B(X_j^B, Y_j^B) \right)^{1/\delta_B}}{\left(\prod_{j=1}^{\delta_A} D^A(X_j^A, Y_j^A) \right)^{1/\delta_A} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\delta_B} D^A(X_j^B, Y_j^B) \right)^{1/\delta_B}} \right]^{1/2}$$

4. Modelação da estrutura interna e inter-relações entre DMUs:

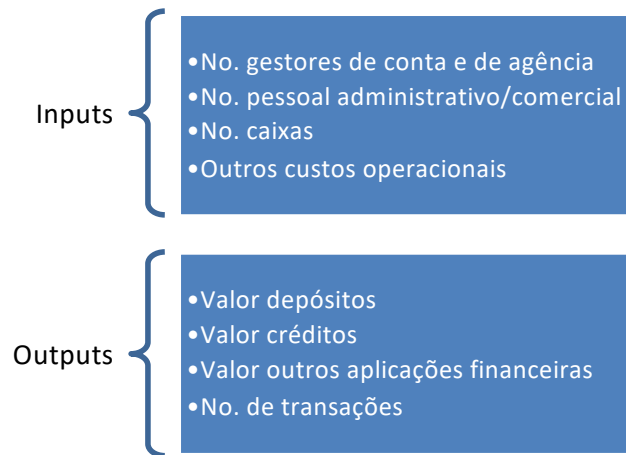
4.2 Análise de desempenho de grupos de DMUs

Extensões à literatura nesta área:

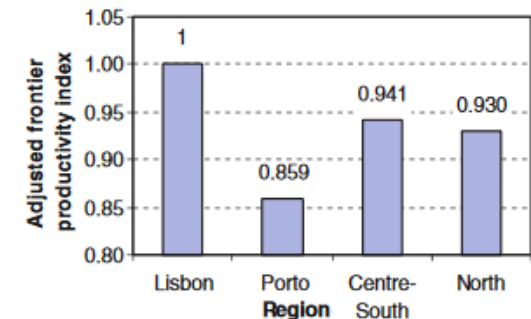
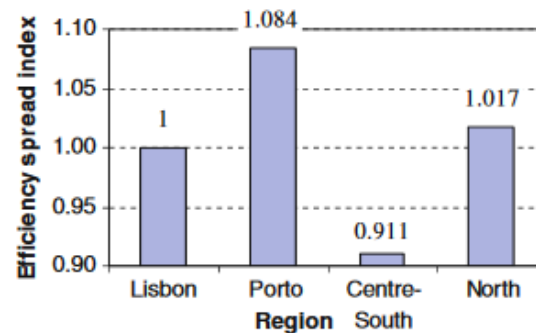
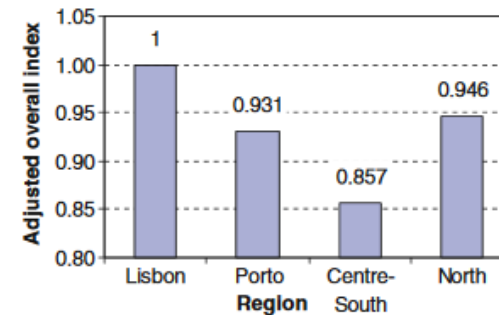
Novo método de comparação entre grupos de DMUs baseado no índice de Malmquist. Aplicação do novo método de comparação entre grupos a **balcões bancários em regiões distintas em Portugal**. O novo índice (I^{AB}) foi estendido a comparações envolvendo mais do que dois grupos, garantindo a **circularidade** do índice.

[Camanho and Dyson, 2006]

Modelo da atividade das agências bancárias



Amostra de 144 agências bancárias
(39 em Lisboa, 24 no Porto, 47 no Sul e 34 no Norte)



DEA: roteiro das aplicações

1. Aplicações com maior preponderância

- Setor bancário
- Educação
- Saúde
- Agricultura
- Transportes

[Liu *et al*, 2013]

2. Áreas com maior dinâmica de crescimento

- Energia
- Ambiente

[Liu *et al*, 2013]

3. Áreas inovadoras

- Qualidade de vida
- Responsabilidade Social Corporativa
- Setor da construção
- Pesca artesanal
- Lojas de retalho

DEA: roteiro das aplicações

1. Aplicações com maior preponderância

- Setor bancário
- Educação
- Saúde
- Agricultura
- Transportes

Home
Benchmarking Restrito
Rankings Básico
Desempenho Agregado
Perguntas Frequentes
Equipa e contactos

Área reservada
Utilizador:
Password:

[Recuperar password](#)

Bencharking das Escolas Secundárias Portuguesas

Registered users only

```
graph TD
    BEBSP[ENES/ENEB] --> Bencharking
    Bencharking --> Indicadores
    Indicadores --> Bencharking_Restrito[Benchmarking Restrito]
    Indicadores --> Rankings
    Rankings --> Desempenho_Agregado[Desempenho Agregado]
    Desempenho_Agregado --> Indicadores
    Indicadores --> Avaliacao_Ag[Avaliação Interna]
    Avaliacao_Ag --> Indicadores
    Avaliacao_Ag --> Desempenho_Agregado
    Questionarios[Questionários] --> Indicadores
```

HOBE Hospital Benchmarking

- Início
- Benchmarking de Serviços
- Desempenho Agregado do Serviço
- Desempenho Agregado dos Hospitais
- Perguntas Frequentes
- Contactos

Benchmarking Hospitais Portugueses

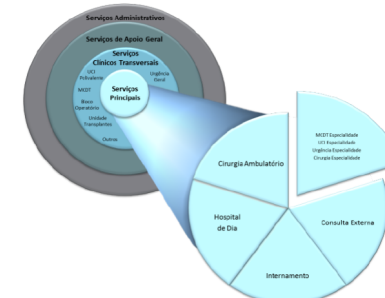
HOBE - Benchmarking Hospitais Portugueses é uma plataforma web inovadora, no sector da saúde em Portugal. Esta plataforma tem como objectivo promover a acessibilidade, por parte das instituições hospitalares nacionais, a uma ferramenta de suporte à sua avaliação. A plataforma permite que os hospitais se avaliem num conjunto de dimensões e que se comparem com outros hospitais públicos do país - Benchmarking.

O HOBE apresenta uma panóplia alargada de indicadores incidindo sobre as várias actividades hospitalares e recorre a técnicas de fronteira para agregar alguma dessa informação em indicadores globais que permitem uma mais fácil comparação dos hospitais. Para além do benchmarking, o HOBE permite ainda aos hospitais observar o seu desempenho ao longo do tempo, em cada indicador, contribuindo para que estes desenvolvam métodos sistemáticos para a melhoria contínua da qualidade dos seus serviços.

Como cada hospital é uma entidade única, a construção dos indicadores baseou-se num modelo hospitalar abrangente que olha um hospital como um conjunto agregado de serviços que vão desde serviços de âmbito global (e.g. administrativos e de apoio geral) até serviços de âmbito mais particular (relacionados com serviços clínicos de prestação de cuidados de saúde).

A partir deste modelo, na Figura, que desenvolvemos indicadores a 2 níveis: nível do hospital, e nível dos serviços principais. Não são considerados todos os serviços de um hospital, mas apenas aqueles que mais contribuem para os custos gerais dos hospitais. O critério para excluir alguns serviços (e.g. transplantes) prende-se ainda com a falta de um universo de comparação representativo o que limita as possibilidades de benchmarking.

Os serviços principais (e.g. cardiologia, ortopedia, etc.), por sua vez prestam serviços em várias linhas de produção que vão desde o internamento até ao hospital de dia, passando por serviços que são normalmente prestados de forma transitória, mas que em certos casos existem afectos a uma especialidade em concreto (e.g. urgência de pediatria ou UCI de cardiologia).



MIT Portugal

Transportation Systems

DEA: roteiro das aplicações

2. Áreas com maior dinâmica de crescimento

- Energia
- Ambiente

Weight Restrictions in the DEA Benchmarking Model for Norwegian Electricity Distribution Companies

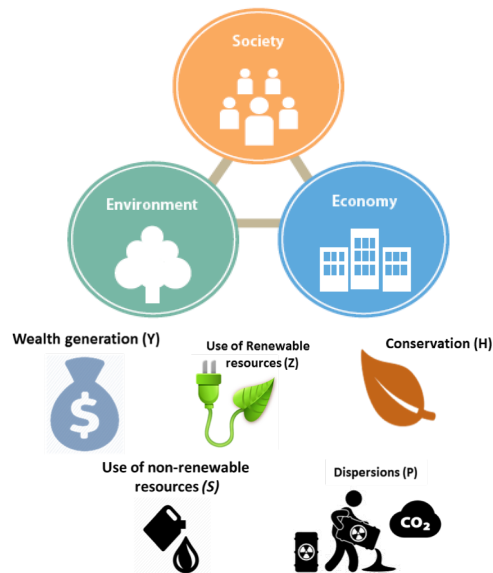


Norwegian Water Resources and Energy Directorate
Norwegian School of Economics and Business Administration

New Models for the Assessment of Corporate Social Responsibility in the mining sector

Benchmarking de Estações de Tratamento de Águas Residuais (ETARs)

The use of Composite Indicators to Evaluate the Performance of Brazilian Hydropower plants



DEA: roteiro das aplicações

2. Áreas inovadoras

- Lojas de retalho
- Qualidade de vida
- Responsabilidade Social Corporativa
- Setor da construção
- Pesca artesanal

Análise de lojas de Retalho de Base Alimentar



Análise Qualidade de Vida das Cidades Europeias

What is City Statistics?

A range of indicators covering most aspects relating to **quality of life** in cities in the EU, Norway, Switzerland and Turkey (demography, housing, health, labour market, education, environment,

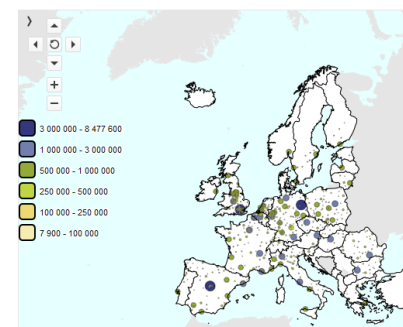
DATABASE

- Urban audit (urb) M
- Cities and greater cities (urb_cg)
- Functional urban areas (urb_luz)
- ZIP Perception survey results (urb_percep) i

STATISTICS ILLUSTRATED

Population on 1 January, 2014 (Urban Audit cities)

For data visualisations of more indicators for European cities, see [City Statistics Illustrated](#)



eurostat

Análise do Setor da Construção



Análise da Pesca Artesanal

ATLANTIC AREA Transnational Programme
ESPACIO ATLÁNTICO Programa Transnacional
ESPACE ATLANTIQUE Programme Transnational
ESPACIO ATLÁNTICO Programa Transnacional



European Union
ERDF Funds

Conclusões

- É uma área com um grande potencial de aplicação, tendo os principais desenvolvimentos sido ditados por aplicações em contextos reais:
“Application Driven Theory”
- É essencial que os estudos de DEA adotem uma metodologia robusta de **gestão de desempenho**.
- Na FEUP, as **principais contribuições** estão relacionadas com:
 - a **aplicação de DEA em contexto inovadores**, mostrando o potencial de aplicação e a riqueza da informação de apoio à gestão que é possível obter com esta metodologia.
 - o **desenvolvimento de modelos inovadores** de avaliação de desempenho:
 - eficiência económica (setor financeiro); análise de grupos com pseudo-Malmquist indices; produtividade e convergência, alocação de recursos; contexto envolvente; indicadores compósitos; outputs indesejáveis; restrições de pesos, modelos de eco-eficiência.
- Os **desafios futuros** passam pelo envolvimento em novos projetos - **colaborações futuras com colegas do Brasil!**



Data Envelopment Analysis:
A evolução do estado da arte
na metodologia e nas aplicações

Ana S. Camanho

Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal

51º SBPO

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) | Campus Limeira

4 Setembro 2019

Referências

- Aigner, D., Lovell, C., Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of Stochastic frontier production models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21-37.
 - Ali, A. I. and Seiford, L. M. (1990). Translation-invariance in data envelopment analysis. *Operations research letters*, 9(6), 403-405.
 - Aparicio, J., Crespo-Cebada, E., Pedraja-Chaparro, F., and Santín, D. (2017). Comparing school ownership performance using a pseudo-panel database: A malmquist-type index approach. *European Journal of Operational Research*, 256(2):533 – 542
 - Aragon, Y., A. Daouia, and C. Thomas-Agnan. (2005). Nonparametric frontier estimation: a conditional quantile based approach. *Econometric Theory* 21: 358–389.
 - Banker, R. D. , Charnes A. , and Cooper W. W. (1984a). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* 30(9), 1078-1092.
 - Banker, R. D. (1984b). Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research* 17, 35-44.
 - Banker, R.D. and Morey, R.C. (1986). "The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis." *Management Science* 32(12):1613-1627.
 - Banker R. D. and Morey R. C. (1986). Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs. *Operations Research* 34(4), 513-521.
 - Banker R. D. and Thrall R. M. (1992). Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research* 62, 74-84.
 - Banker, R. D. (1993). Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: A statistical foundation. *Management Science*, 39(10), 1265-1273.
 - Banker, R.D. (1996). Hypothesis Tests Using Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis* 7(2-3), 139-159.
 - Banker, R. D., and Natarajan, R. (2008). Evaluating contextual variables affecting productivity using data envelopment analysis. *Operations Research*, 56(1), 48-58.
 - Banker, R.D., Natarajan, R. (2011), Statistical tests based on DEA efficiency scores. In: *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Cooper W.W., Seiford L., and Zhu J. (Eds), Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA (Chapter 11), pp. 299-321.
 - Caves D. W. , Christensen L. R. , and Diewert W. E. (1982). "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity." *Econometrica* 50(6):1393-414.
 - Camanho, A.S. and Dyson, R.G. (2005), Cost efficiency measurement with price uncertainty: a DEA application to bank branch assessments. *European journal of Operational Research* 161, 432-446.
 - Camanho, A.S. and Dyson, R.G. (2008), A generalisation of the Farrell cost efficiency measure applicable to non-fully competitive settings. *Omega – International Journal of Management Science* 36(1), 147-162.
 - Cazals, C., Florens, J.-P., Simar, L., (2002), Nonparametric frontier estimation: A robust approach, *Journal of Econometrics*, 106 (1), 1-25.
 - Chambers, R.G., Chung, Y., Färe, R. (1996), Benefit and distance functions, *Journal of Economic Theory*, 70 (2), 407-419.
 - Chambers, R. G., Färe, R., and Grosskopf, S. (1996). Productivity growth in APEC countries. *Pacific Economic Review*, 1(3), 181-190.
 - Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2 (6), 424-444.
 - Charnes A. , Cooper W. W. , and Rhodes E. (1981). "Evaluating Program and Managerial Efficiency: an Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through." *Management Science* 27(6):668-97.
 - Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J. (1985), Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions, *Journal of Econometrics*, 30 (1-2), 91-107.
 - Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Halek, R., Klopp, G., Schmitz, E., et al. (1986). Two-phase data envelopment analysis approaches to policy evaluation and management of army recruiting activities: Tradeoffs between joint services and army advertising. Research Report CCS #532, Center for Cybernetic Studies, University of Texas-Austin, Austin, TX.
-

Referências

- Cherchye, L., Moesen, W., Rogge, N., and Van Puyenbroeck, T. (2007). An introduction to Benefit of the doubt composite indicators. *Social Indicators Research*, 82(1), 111-145.
 - Cook, W. D. and Kress, M. (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings. *Management Science*, 36(11), 1302-1310.
 - Cook WD, Kazakov A, Roll Y and Seiford LM (1991). A data envelopment approach to measuring efficiency: Case analysis of highway maintenance patrols. *The Journal of Socioeconomics* 20 (1): 83–103.
 - Cook W. D. , Kress M. , and Seiford L. M. 1993. "On the Use of Ordinal Data in Data Envelopment Analysis." *Journal of the Operational Research Society* 44(2):133-40.
 - Cook W. D. , Kress M. , and Seiford L. M. 1996. Data Envelopment Analysis in the Presence of Both Quantitative and Qualitative Factors. *Journal of the Operational Research Society* 47(7):945-53.
 - Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic, Boston.
 - Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J. (2011). *Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations*, In: Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J. (eds), *Handbook on Data Envelopment Analysis*, International Series in Operations Research and Management Science, Springer, p. 1-39.
 - Daraio, C., Simar, L., (2007), Conditional nonparametric frontier models for convex and nonconvex technologies: A unifying approach, *Journal of Productivity Analysis*, 28 (1-2), 13-32.
 - Dyson, R.G., Thanassoulis, E.(1988), Reducing weight flexibility in data envelopment analysis , *Journal of the Operational Research Society*, 39(6), 563-576.
 - Emrouznejad A. and Amin G.R. (2009), DEA models for ratio data: Convexity consideration, *Applied Mathematical Modelling*, 33 (1), 486-498.
 - Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32–45
 - Fare R. and Lovell C. A. K. (1978). Measuring the Technical Efficiency of Production. *Journal of Economic Theory* 19, 150-162.
 - Färe, R., Grosskopf, S., and Lovell, C. A. K. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Kluwer Nijhoff Publishing, Boston.
 - Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., and Pasurka, C. (1989). Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach. *Review of Economics and Statistics*, 71(1), 90-98.
 - Fare R. , Grosskopf S. , and Lovell C. A.K. (1994). *Production Frontiers*. Cambridge University Press.
 - Fare, R., Grosskopf, S., Norris, M., and Zhang, Z. (1994). Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries. *American Economic Review*, 84(1), 66-83.
 - Färe, R., Grabowski, R., Grosskopf, S., and Kraft, S. (1997). Efficiency of a fixed but allocatable input: A non-parametric approach. *Economics Letters*, 56:187–193.
 - Färe, R., Grosskopf, S., (2000). Network DEA, *Socio-Economic Planning Sciences*, 34 (1), 35-49.
 - Farrell, M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 120(3), 253-281.
 - Golany, B. and Roll, Y. (1989). An application procedure for DEA. *Omega-International Journal of Management Science*, 17(3), 237-250.
 - Hollingsworth, B and Smith, P (2003). Use of ratios in data envelopment analysis. *Applied Economics Letters*, 10 (11), 733-735.
 - Khalili, M, Camanho, A.S., Portela, M.C.A.S, Alirezaee, M.R., (2010). The measurement of relative efficiency using Data Envelopment Analysis with assurance regions that link inputs and outputs, *European Journal of Operational Research*, Vol. 203 (3), 761-770, 2010.
 - Koopmans, T. (1951). *Activity analysis of production and allocation*. John Wiley & Sons, New York.
 - Krugman, P. (1997). *The Age of Diminished Expectations: US Economic Policy in the 1990s*. MIT Press, Cambridge.
 - Kuosmanen T, Cherchye L and Sipilainen T (2006). The law of one price in data envelopment analysis: Restricting weight flexibility across firms. *European Journal of Operational Research* 170, 735–757.
-

Referências

- Lovell, C. A. K., Pastor, J. T., and Turner, J. A. (1995). Measuring macroeconomic performance in the OECD: a comparison of european and non-european countries. *European Journal of Operational Research*, 87(3), 507-518.
 - Liu, J.S., Lu, L.Y.Y., Lu, W.M., Lin, B.J.Y (2013). A survey of DEA applications, *Omega*, 41, 893-902.
 - McDonald, J. (2009). Using least squares and tobit in second stage DEA efficiency analyses. *European Journal of Operational Research*, 197(2), 792-798.
 - Meeusen, W., van den Broeck, J. (1977). Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review*, 18(2), 435-444.
 - Olesen, O.B., Petersen, N.C., Podinovski, V.V. (2015). Efficiency analysis with ratio measures. *European Journal of Operational Research*, 245 (2), 446-462.
 - Pareto, V. (1906). *Manual of Political Economy*. Oxford University Press (translation of *Manuale di Economia Politica*, originally published in 1906 (in Italian) and translated to French in 1927).
 - Portela, M.C.A.S., Thanassoulis, E., Simpson, G. (2004), Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches, *Journal of the Operational Research Society*, 55 (10), 1111-1121.
 - Pastor, J.T., Ruiz, J.L., Sirvent, I (1999). Enhanced DEA Russell graph efficiency measure, *European Journal of Operational Research*, 115 (3), 596-607.
 - Ray, S.C. (1988), Data envelopment analysis, nondiscretionary inputs and efficiency: an alternative interpretation, *Socio-Economic Planning Sciences*, 22 (4), 167-176.
 - Ray, S. C. (1991). Resource-use efficiency in public-schools - a study of Connecticut data. *Management Science*, 37(12), 1620-1628.
 - Roll Y, Cook WD and Golany B (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE Transactions* 23 (1): 2-9.
 - Ruggiero, J. (1996). On the measurement of technical efficiency in the public sector. *European Journal of Operational Research*, 90:553-565.
 - Ruggiero, J. (1998). Non-discretionary inputs in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 111:461-469.
 - Ruggiero, J. (2004). Performance evaluation when non-discretionary factors correlate with technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, 159(1):250-257.
 - Simar, L. and Wilson, P. W. (1998). Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models. *Management Science*, 44(1), 49-61.
 - Simar, L. (2003), Detecting outliers in frontier models: A simple approach, *Journal of Productivity Analysis*, 20 (3), 391-424.
 - Simar, L., Wilson, P.W., (2007), Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes, *Journal of Econometrics*, 136 (1), 31-64.
 - Sowlati, T., Paradi, J.C (2004), Establishing the "practical frontier" in data envelopment analysis, *Omega*, 32(4), 261-272.
 - Thanassoulis, E., Dyson, R.G. (1992), Estimating preferred target input-output levels using data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 56 (1), 80-97.
 - Thompson R. G. , Langemeier L. N. , Lee C. , Lee E. , and Thrall R. M. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis With Application to Kansas Farming. *Journal of Econometrics* 46, 93-108.
 - Tone, K. (2001), Slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 130 (3), 498-509.
 - Vastag, G. (2000). The theory of performance frontiers. *Journal of Operations Management* 18, p.353-360
 - Wong Y.-H. B. and Beasley J. E. 1990. "Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis." *Journal of the Operational Research Society* 41(9):829-35.
-