PROGRAMAÇÃO LINEAR - HISTÓRICO E AVANÇOS RECENTES

Aurelio Oliveira - aurelio@ime.unicamp.br

IMECC - UNICAMP

Setembro - 2019

Colegas

- Geraldo Veiga
- Carla Ghidini – Cecilia Castro
- Christiano Lyra – Clóvis Perin
- Daniela Cantane – Daniele Silva
- Danilo Oliveira – Danny Sorensen
- Fábio Rodrigues – Fernando Villas-Boas
- Frederico Campos – Glaucia Bressan
- Jair Silva – Jordi Castro
- Kelly Cardena – Lilian Berti
- Lino Silva – Luciana Casacio
- Luciana Tsuchiya – Manolo Heredia
- Maria Gonzalez Lima – Marta Velazco
- Mario Nascimento – Petra Bartmeyer
- Porfirio Suñagua – Rafael Santos
- Silvana Bocanegra – Thiane Coliboro

Resumo

- Histórico
- Métodos
- Modelagem
- Implementações Comerciais
- Atualidade
- Perspectivas Futuras
- Conclusões

Histórico – Simplex

- Fourier 1826. Propriedades de inequações.
- Kantorovich 1939. Modelagem de problemas de programação linear. Dualidade. Método de solução.
- Dantzig 1947. Método Simplex. Computador.
- Orden 1952. Base artificial.
- Lemke 1954. Método Dual Simplex.
- Hoffman 1954. Ciclagem. Bland 1977. Perturbação.
- Método Primal Dual 1956.
- Fatoração LU esparsa da base 1968 e sua atualização 1972.
- Klee, Minty 1972. Simplex é **Exponencial no pior caso?**
- Kantorovich e Koopsman 1975. Prêmio Nobel em Economia.

PL Polinomial

- Khachiyan 1979. Método dos Elipsóides. PL é polinomial. Outros problemas são polinomiais.
- Borgwardt 1982. Caso médio Simplex.
- Karmarkar 1984. Métodos de pontos interiores. Polinomial. Função Potencial. Notícia de jornal. Patente requerida.
- Dikin 1967. Primal Afim Escala.
- Adler, Resende, Veiga, Karmarkar 1989. Dual Afim Escala.
- Kojima, Mizuno, Yoshie 1990. Método Primal Dual (Barreira Logarítmica).
- Gonzaga 1992. Função Potencial.
- Mehotra 1992. Método Preditor Corretor.
- Método Simplex. Avanços teóricos e práticos.
- Gondzio 1995. Método das Múltiplas Correções.
- Problema das 4 cores 1997.
- Gondzio, Grothey 2006. Maior PL resolvido. 253 Milhões $\times$ 1,01 Bilhão.

Deu no NYT

The New York Times

AMERICANS IN POLL VIEW GOVERNMENT MORE CONFIDENTLY

TREASURY MAY ASK INCREASES IN TAXES OF SOME CONCERNS

Albany Leaders Predicting a Cut In Income Taxes

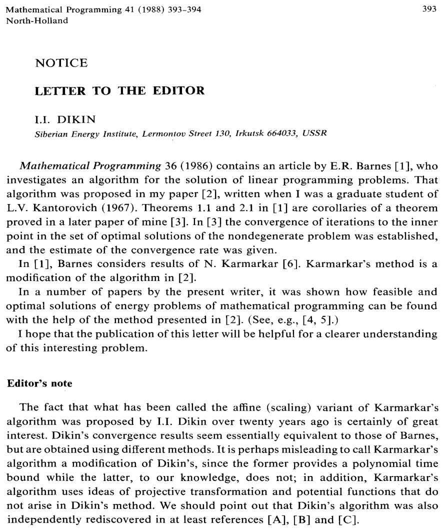
Cocaine Traffickers Kill 17 in Peru Raid On Antidrug Team

Vote Comes to a 'Homeland,' But African Problems Linger

Breakthrough in Problem Solving

Homeless Spend Nights in City Welfare Office

High Cuban Defector Speaks Out, Denouncing Castro as 'Impulsive'


Mathematical Programming 41 (1988) 393–394
North-Holland 393

NOTICE

LETTER TO THE EDITOR

I.I. DIKIN
Siberian Energy Institute, Lermontov Street 130, Irkutsk 664033, USSR

Mathematical Programming 36 (1986) contains an article by E.R. Barnes [1], who investigates an algorithm for the solution of linear programming problems. That algorithm was proposed in my paper [2], written when I was a graduate student of L.V. Kantorovich (1967). Theorems 1.1 and 2.1 in [1] are corollaries of a theorem proved in a later paper of mine [3]. In [3] the convergence of iterations to the inner point in the set of optimal solutions of the nondegenerate problem was established, and the estimate of the convergence rate was given.

In [1], Barnes considers results of N. Karmarkar [6]. Karmarkar's method is a modification of the algorithm in [2].

In a number of papers by the present writer, it was shown how feasible and optimal solutions of energy problems of mathematical programming can be found with the help of the method presented in [2]. (See, e.g., [4, 5].)

I hope that the publication of this letter will be helpful for a clearer understanding of this interesting problem.

Editor's note

The fact that what has been called the affine (scaling) variant of Karmarkar's algorithm was proposed by I.I. Dikin over twenty years ago is certainly of great interest. Dikin's convergence results seem essentially equivalent to those of Barnes, but are obtained using different methods. It is perhaps misleading to call Karmarkar's algorithm a modification of Dikin's, since the former provides a polynomial time bound while the latter, to our knowledge, does not; in addition, Karmarkar's algorithm uses ideas of projective transformation and potential functions that do not arise in Dikin's method. We should point out that Dikin's algorithm was also independently rediscovered in at least references [A], [B] and [C].

Carta do Dikin

References

[1] E.R. Barnes, *Mathematical Programming* 36 (1986) 174–182.
[2] I.I. Dikin, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 174 (1967) 747–748.
[3] I.I. Dikin, *Upravljaemye Sistemy* 12 (1974) 54–60.
[4] I.I. Dikin, *Prikladnaja Matematiki Novosibirsk Nauka* (1978) 139–158.
[5] I.I. Dikin, *R.J. Math.* 5B (1979) 871.
[6] N. Karmarkar, *Combinatorica* 4 (1984) 373–395.

[A] T.M. Cavalier and A.L. Soyster, "Some computational experience and a modification of the Karmarkar algorithm," The Pennsylvania State University, ISME working Paper 85-105, 1985.
[B] K.O. Kortanek and M. Shi, "Convergence results and numerical experiments on a linear programming hybrid algorithm," *European Journal of Operations Research* 32 (1987) 47–61.
[C] R.J. Vanderbei, M.S. Meketon and B.A. Freedman, "A modification of Karmarkar's linear programming algorithm," *Algorithmica* 1 (1986) 395–407.

Método Simplex

- Iteração muito barata
- Muitas iterações
- Teoria versus Prática
- Complexidade computacional do método Simplex!?
- Problemas “menores”. Hiper-esparsos. Programação Inteira
- Geração de colunas
- Degenerecência
- Problemas específicos: fluxos em redes, regressão L_1
- Implementações sofisticadas
- Critérios de entrada na base voltados para o problema
- Detecção de problemas infactíveis e ilimitados
- Ensino de PL :)

Métodos de Pontos Interiores

- Iteração cara
- Poucas iterações
- Melhores resultados teóricos
  - Polinomial
  - Convergência quadrática
- Degenerecência
- Instabilidade numérica!?
- Problemas “maiores”. Programação Inteira!
- Geração de colunas?
- Problemas específicos: fluxos em redes, regressão L_1...
- Desenvolvimento teórico parece ser mais fácil
- Programação Não-linear
  - Programação Quadrática com variáveis separáveis
  - Função objetivo não-linear com restrições lineares
  - ...restrições quadráticas!
- Detecção de problemas infactíveis e ilimitados
- Ensino de PL :(

Forma Padrão

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{lr} \min & c^t x \\ s.a & A\,x = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Problema dual

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{array}{lr} \max & b^t y \\ s.a & A^t y + z = c \\ & z \geq 0 \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

$m < n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$.

posto(A)= m

Condições de otimalidade

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0 \\ A^t y + z - c &= 0 \\ XZe &= 0 \\ (x, z) &\geq 0. \end{aligned}$$

$X = diag(x)$, $Z = diag(z)$ e $e = (1, \ldots, 1)^t$.

Complexidade Computacional do Método Simplex

- Não há prova de que o método Simplex é polinomial. (Ainda?)
- Para todo critério conhecido de escolha de variável que entra na base existe ao menos um PL que necessita um número exponencial de iterações...
- ...exceto um critério.
- Quando um critério é exponencial, outro ou outros são extremamente eficientes.
- Combinações de critérios podem gerar um método polinomial?
- Não sabemos se o Simplex é polinomial ou exponencial no pior caso.
- Métodos e problemas são conceitos diferentes. LP $\in$ P.

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo
2016

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$
- Um dia: $32 \times 10^{84} = 2^{89}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$
- Um dia: $32 \times 10^{84} = 2^{89}$
- Um ano: $512 \times 10^{89} = 2^{98}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$
- Um dia: $32 \times 10^{84} = 2^{89}$
- Um ano: $512 \times 10^{89} = 2^{98}$
- Universo: $16 \times 10^9 \times 2^{98} < 2^{102} \times 16^9 = 2^{138}$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$
- Um dia: $32 \times 10^{84} = 2^{89}$
- Um ano: $512 \times 10^{89} = 2^{98}$
- Universo: $16 \times 10^9 \times 2^{98} < 2^{102} \times 16^9 = 2^{138}$

$$2^{(10^9)} - 2^{138} = 2^{(10^9)}$$

Um Método Ruim

Verifique todas as bases de um PL e selecione a melhor.
Considere um PL com $n = 10^9$ e m= n/2. Máximo N= $\frac{n!}{m!m!}$
Computador Sunway TaihuLight 10^{18} FLOPS por segundo 2016

Tempo para solução:

- $N > 2^n$, menos que $2^{(10^9)}$ FLOPS
- Um segundo: $10^{18} < 16^{18} = 2^{72}$
- Um minuto: $64 \times 10^{72} = 2^{78}$
- Uma hora: $64 \times 10^{78} = 2^{84}$
- Um dia: $32 \times 10^{84} = 2^{89}$
- Um ano: $512 \times 10^{89} = 2^{98}$
- Universo: $16 \times 10^9 \times 2^{98} < 2^{102} \times 16^9 = 2^{138}$

$$2^{(10^9)} - 2^{138} = 2^{(10^9)}$$

$2^{(10^3)} - 2^{138} =$
$1,07150860718627 \times 10^{301} - 3,48449143727041 \times 10^{41}$

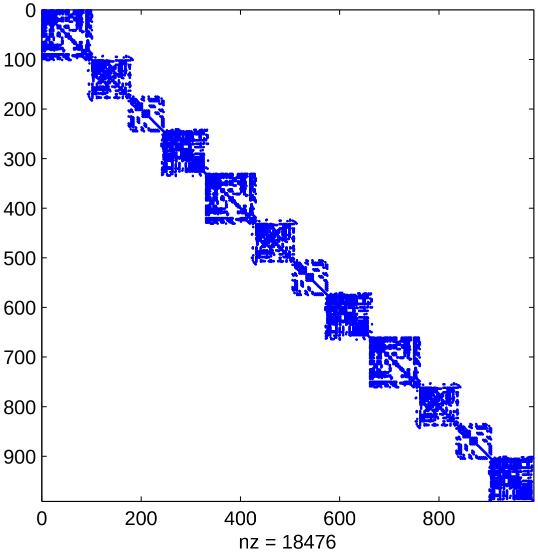
Métodos Simples

- Métodos para programação linear que convergem muito lentamente
- Não são usados para resolver um PL completamente
- Aplicações
  - Ponto inicial
  - Warm start
  - Transição entre precondicionadores
  - Resultados teóricos

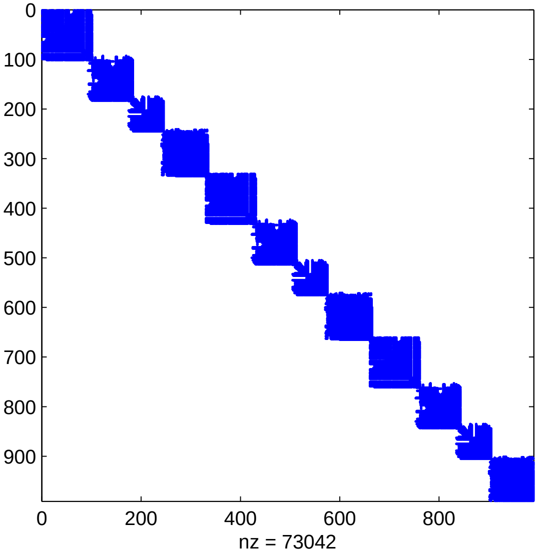
Livros Texto – Modelagem e Implementação

- Variáveis livres. Desigualdades. Forma padrão.
- Degenerecência. Perturbação.
- Variável candidata a entrar na base.
- Custo relativo normalizado.
- Fatoração LU – Atualização da fatoração.
- Fatoração de Cholesky – Métodos iterativos.
- Esparsidade
- XMP, OSL, CPLEX, Gurobi, Mosek, Xpress...
- Versão acadêmica livre.

Esparsidade - antes de fatorar



Esparsidade - depois de fatorar



Atualização da Fatoração LU

$$B = LU$$

$$B - Be_j e_j^t + Ae_i e_j^t$$

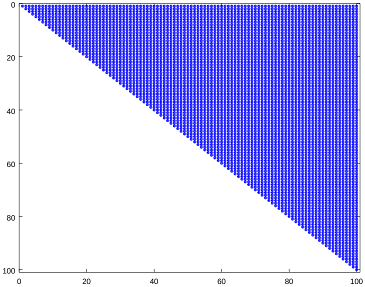
$$LU - LUe_j e_j^t + Ae_i e_j^t$$

$$LU - LU_j e_j^t + A_i e_j^t$$

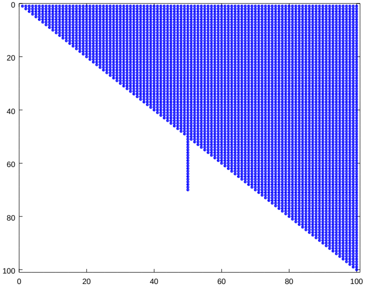
$$L(U - U_j e_j^t + (L^{-1} A_i) e_j^t)$$

- Permuta coluna nova com posteriores.
- Somente U é alterado. L não se altera!
- Fatoração completa a cada 50 ou 100 iterações.

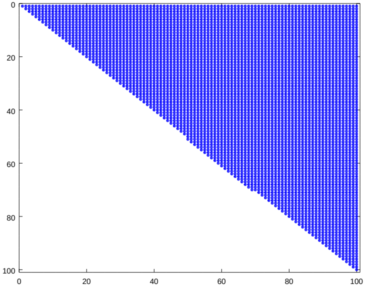
Matriz triangular superior U



Spike



Reordenamento das colunas



Melhoria do desempenho – Método Simplex

- Cálculo da Base Inicial
  - Mais rápido
  - Mais variáveis estruturais
- Escolha da variável que entra na base
- Reescalamento dos dados do problema
- Fatoração LU e atualização da fatoração
- Preprocessamento
- Dual Simplex

Implementações comerciais

O que não sabemos?

- Preprocessamento e reescalamento
- Escolha do método de solução
- Solução inicial
- Escolha da variável que entra na base. Sai da base.
- Métodos iterativos nos sistemas lineares do Simplex?
- Critério de crossover
- Paralelização
- Álgebra Linear
  - Fatoração LU
  - Fatoração de Cholesky

Atualmente

- Iterações de pontos interiores
  - Múltiplas correções: 50 ou 100 iterações 2008
  - Iterações continuadas 2017
- Precondicionadores 2013 2017 2017 2018 2019
- Reescalamento 2012 2012 2013
- Preprocessamento 2019
  - Eliminação de variáveis (função das demais)
  - Eliminação de restrições (redundantes, dominadas)
  - Antes 412571×1235939. Depois 61563×12114.
  - Elementos não nulos: de 1590993 para 204045.
- Paralelismo (Megiddo 1991):
  Um processador para cada método.
- Paralelismo dos métodos: *A massively parallel interior-point solver for linear energy system models with block structure*. Researchgate 02/09/2019.
- Fatoração de Cholesky 2014 2014

Perspectivas Futuras

- Preprocessamento
- Crossover
- Métodos Iterativos para sistemas lineares - Precondicionadores - Robustez
- Variável que entra na base. Simplex polinomial?
- Primal Dual Simplex
- Barreira logarítmica não é importante.
  Correção não linear sim 2020
- Métodos para problemas específicos
- Paralelismo

Conclusões

- Dois métodos eficientes
- Características muito distintas
- Dimensão dos problemas
- Capacidade de processamento
- Novos desafios
- Muito já foi feito
- Muito (mais?) por fazer

Agradecimentos

CNPq

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CAPES